

GABRIEL LIPPMANN

Lieu des foyers des coniques tangentes à quatre droites données

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 6
(1867), p. 496-497

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__496_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1867, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LIEU DES FOYERS DES CONIQUES TANGENTES A QUATRE DROITES DONNÉES;

SOLUTION DE M. GABRIEL LIPPMANN,
Élève du lycée Napoléon.

Soient

$$a = x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,$$

$$b = x \cos \epsilon + y \sin \epsilon - p' = 0,$$

$$c = x \cos \gamma + y \sin \gamma - p'' = 0,$$

$$d = x \cos \delta + y \sin \delta - p''' = 0,$$

les équations des quatre droites données.

En considérant x, y comme les coordonnées de l'un des deux foyers d'une conique tangente à ces droites, les expressions a, b, c, d représenteront les distances de ce foyer aux quatre droites dont il s'agit. Et, en nommant a_1, b_1, c_1, d_1 les valeurs que prennent a, b, c, d lorsque l'on remplace x, y par les coordonnées x_1, y_1 du second foyer de la conique, on aura, d'après une proposition connue,

$$aa_1 = bb_1 = cc_1 = dd_1 = \text{const.}$$

D'où

$$a(x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p) = b(x_1 \cos \epsilon + y_1 \sin \epsilon - p'),$$

$$b(x_1 \cos \epsilon + y_1 \sin \epsilon - p') = c(x_1 \cos \gamma + y_1 \sin \gamma - p''),$$

$$c(x_1 \cos \gamma + y_1 \sin \gamma - p'') = d(x_1 \cos \delta + y_1 \sin \delta - p''').$$

L'élimination de x_1, γ_1 entre ces trois dernières équations donne

$$\begin{vmatrix} a \cos \alpha - b \cos \epsilon, & a \sin \alpha - b \sin \epsilon, & -ap + bp' \\ b \cos \epsilon - c \cos \gamma, & b \sin \epsilon - c \sin \gamma, & -bp' + cp'' \\ c \cos \gamma - d \cos \delta, & c \sin \gamma - d \sin \delta, & -cp'' + dp''' \end{vmatrix} = 0,$$

et, en développant ce déterminant, on trouve

$$\begin{aligned} & p a [bc \sin (\gamma - \epsilon) + cd \sin (\delta - \gamma) + db \sin (\epsilon - \delta)] \\ & - p' b [cd \sin (\delta - \gamma) + da \sin (\alpha - \delta) + ac \sin (\gamma - \alpha)] \\ & + p'' c [da \sin (\alpha - \delta) + ab \sin (\epsilon - \alpha) + bd \sin (\delta - \epsilon)] \\ & - p''' d [ab \sin (\epsilon - \alpha) + bc \sin (\gamma - \epsilon) + ca \sin (\alpha - \gamma)] = 0, \end{aligned}$$

ce qui est l'équation du lieu cherché.