

CH. CAYLA

**Concours d'admission à l'École
normale supérieure (année 1867).
Composition mathématique**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 6
(1867), p. 489-492

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__489_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1867, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
(ANNÉE 1867).

Composition mathématique;

SOLUTION DE M. CH. CAYLA,
Répétiteur au collège Rollin.

On donne deux droites rectangulaires AB, CD; et on considère les hyperboles ayant la droite AB pour asymptote, et tangentes à la droite CD au point fixe P.

On demande :

- 1° Le lieu des foyers de toutes ces hyperboles;*
- 2° Le lieu du point de rencontre de la seconde asymptote avec la perpendiculaire abaissée du point fixe sur la directrice;*
- 3° Le lieu des points d'intersection de la seconde asymptote avec la droite qui joint le foyer au point d'intersection des deux droites données.*

1° Soit F le foyer d'une des hyperboles remplissant les conditions énoncées. Je mène la droite OF, et FG parallèle à AB; et je prolonge PF jusqu'en B. Les angles $\widehat{GFO}$, $\widehat{OFP}$ sont égaux (propriété connue des coniques).

Par conséquent, le point M décrit une strophoïde rectangulaire définie par le point fixe D et la droite PE. Cette strophoïde est égale et parallèle à la première.

3° Pour trouver le troisième lieu, je me sers de l'équation focale des coniques

$$(1 - m^2)x^2 - 2mnxy + (1 - n^2)y^2 - 2(\alpha + mp)x - 2(\beta + np)y + \alpha^2 + \beta^2 - p^2 = 0.$$

L'axe des y est asymptote; donc

$$(1) \quad n^2 = 1,$$

$$(2) \quad \beta + np = 0.$$

Ces hyperboles sont tangentes à l'axe des x au point P dont l'abscisse est a , ce qui donne les relations

$$(3) \quad \beta^2(1 - m^2) = (p + m\alpha)^2,$$

$$(4) \quad \alpha(1 - m^2) = \alpha + mp.$$

Un point du lieu est défini par l'intersection de la droite OF qui a pour équation

$$(5) \quad \frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta},$$

avec l'asymptote AD, qui, passant par le point fixe D, a une équation de la forme

$$y = t(x - 2a).$$

Le coefficient angulaire t est donné par la formule

$$1 - m^2 - 2mnt = 0.$$

On a donc, pour l'équation de AD,

$$(6) \quad 2mny = (1 - m^2)(x - 2a);$$

on aura l'équation du lieu en éliminant α , β , m , n , p entre les six équations numérotées.

Portant les valeurs de α , β , tirées de (2) et (5), dans l'équation (3), il vient

$$1 - m^2 = \left(1 - \frac{nm x}{y}\right)^2,$$

ou

$$m(x^2 + y^2) = 2nxy,$$

d'où l'on tire

$$m^2 = \frac{4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{et} \quad mn = \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

Substituant dans (6) et simplifiant, on a l'équation du lieu

$$4xy^2(x^2 + y^2) = (x^2 - y^2)^2(x - 2a).$$

Cette équation du cinquième degré ne contient que des termes du cinquième et du quatrième degrés. Il est avantageux de la transformer en coordonnées polaires

$$4\rho \cos \omega \sin^2 \omega = (\cos^2 \omega - \sin^2 \omega)^2 (\rho \cos \omega - 2a),$$

$$\rho = 2a \frac{(2\cos^2 \omega - 1)^2}{\cos^2 \omega (4\cos^4 \omega - 3)}.$$

Sous cette forme il est facile de construire la courbe qui représente le lieu des points N.

Note. — Solution analogue par M. Pelatan, élève du lycée de Nîmes.