

KOEHLER

Note sur l'intégration de quelques fonctions contenant un radical du second degré

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 6
(1867), p. 448-451

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__448_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1867, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE

Sur l'intégration de quelques fonctions contenant un radical
du second degré;

PAR M. KOEHLER.

Soit, en premier lieu,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}};$$

Je suppose $c > 0$. En suivant la marche indiquée dans

(*) ISACH NEWTON *Enumeratio linearum tertii ordinis, etc.*, p. 17; ed.
Parisiis; 1797.

les Traités de Calcul intégral, on trouve

$$(1) \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} l [b+2cx + \sqrt{4c(a+bx+cx^2)}] + C.$$

Je présenterai, au sujet de ce résultat, les remarques suivantes :

1° En désignant le trinôme du second degré et ses deux dérivées par P, P' et P'', on aura

$$P = a + bx + cx^2, \quad P' = b + 2cx, \quad P'' = 2c.$$

Je substitue ces résultats dans (1) et j'obtiens

$$(2) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{P}} = \frac{1}{\sqrt{c}} l (P' + \sqrt{2PP''}) + C.$$

Au moyen de cette dernière formule, on écrira immédiatement

$$\begin{aligned} \int \frac{8dx}{\sqrt{5-3x+7x^2}} &= \frac{8}{\sqrt{7}} l [14x - 3 + \sqrt{28(5-3x+7x^2)}] + C; \\ \int \frac{3dx}{\sqrt{8+9x^2}} &= l [18x + \sqrt{36(8+9x^2)}] + C \\ &= l (3x + \sqrt{8+9x^2}) + C'. \end{aligned}$$

2° On a

$$\begin{aligned} P' + \sqrt{2PP''} &= b + 2cx + \sqrt{4c(a+bx+cx^2)}, \\ P' - \sqrt{2PP''} &= b + 2cx - \sqrt{4c(a+bx+cx^2)}; \end{aligned}$$

d'où

$$(P' + \sqrt{2PP''})(P' - \sqrt{2PP''}) = b^2 - 4ac = \text{const.},$$

d'où

$$l(P' + \sqrt{2PP''}) = -l(P' - \sqrt{2PP''}) + C''.$$

De cette égalité il résulte que la formule (2) peut être

mise sous la forme suivante :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{c}} \mathcal{A}(P' + \sqrt{2PP'}) + C'''.$$

Soit, en second lieu, une intégrale de la forme

$$\int \frac{(Ax^m + Bx^{m-1} + \dots + L) dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}.$$

Le numérateur est une fonction entière.

Pour fixer les idées, j'appliquerai la méthode que je propose à l'exemple suivant :

$$\int \frac{(5x^3 + x^2 - 3x + 1) dx}{\sqrt{1 + 4x + 2x^2}}.$$

Désignant le trinôme sous le radical par P et sa dérivée par P' , je pose

$$(\alpha) \quad \int \frac{5x^3 + x^2 - 3x + 1}{\sqrt{P}} dx = (ax^2 + bx + c) \sqrt{P} + \int \frac{Q dx}{\sqrt{P}}.$$

a, b, c désignent des constantes indéterminées. En différentiant l'équation (α) , on aura

$$\frac{5x^3 + x^2 - 3x + 1}{\sqrt{P}} = (2ax + b) \sqrt{P} + (ax^2 + bx + c) \frac{P'}{2\sqrt{P}} + \frac{Q}{\sqrt{P}};$$

d'où

$$5x^3 + x^2 - 3x + 1 = (2ax + b)P + (ax^2 + bx + c) \frac{P'}{2} + Q.$$

Remplaçons P, P' par leurs valeurs, puis effectuons les calculs indiqués, il viendra

$$\begin{array}{rcl} 5x^3 + x^2 - 3x + 1 & = & 6ax^3 + 10a \left| \begin{array}{l} x^2 + 2a \\ + 6b \\ + 2c \end{array} \right| x + 2c + b + Q. \end{array}$$

Je puis disposer des indéterminées a, b, c de manière

que les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres soient égaux. On aura alors pour Q une valeur constante. Les valeurs de a, b, c sont fournies par les équations suivantes :

$$(\beta) \quad 6a = 5, \quad 10a + 4b = 1, \quad 2a + 6b + 2c = -3;$$

d'où

$$a = \frac{5}{6}, \quad b = -\frac{11}{6}, \quad c = \frac{19}{6},$$

par conséquent,

$$Q = -\frac{21}{6}.$$

Remplaçons, dans l'égalité (α) , a, b, c, Q par leurs valeurs, il viendra

$$\int \frac{(5x^3 + x^2 - 3x + 1)}{\sqrt{1 + 4x + 2x^2}} dx = \left(\frac{5}{6}x^2 - \frac{11}{6}x + \frac{19}{6} \right) \sqrt{1 + 4x + 2x^2} - \frac{21}{6} \int \frac{dx}{\sqrt{1 + 4x + 2x^2}}.$$

En vertu de la formule (2), on écrira immédiatement

$$\begin{aligned} & -\frac{21}{6} \int \frac{dx}{\sqrt{1 + 4x + 2x^2}} \\ & = -\frac{21}{6\sqrt{2}} l[4x + 4 + \sqrt{8(2x^2 + 4x + 1)}] + C; \end{aligned}$$

donc finalement :

$$\begin{aligned} & \int \frac{5x^3 + x^2 - 3x + 1}{\sqrt{1 + 4x + 2x^2}} dx \\ & = \left(\frac{5}{6}x^2 - \frac{11}{6}x + \frac{19}{6} \right) \sqrt{1 + 4x + 2x^2} \\ & \quad - \frac{7}{2\sqrt{2}} l[2x + 2 + \sqrt{2(2x^2 + 4x + 1)}] + C'. \end{aligned}$$

Le système (β) est toujours possible, à cause de la constitution des équations de ce système. La marche à suivre pour le cas général est la même.