

J. DE VIRIEU

Résolution trigonométrique d'une équation du troisième degré

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 6 (1867), p. 444-446

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6_444_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1867, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RÉSOLUTION TRIGONOMÉTRIQUE D'UNE ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ;

PAR M. J. DE VIRIEU,
Professeur à Lyon.

1. A la page 421 du tome XX des *Nouvelles Annales*, on trouve les formules suivantes :

$$(A) \quad \begin{cases} x^3 + ax - b = 0, & \frac{2}{b} \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{3}{2}} = \tan \varphi, \\ \sqrt[3]{\tan \frac{\varphi}{2}} = \sin \psi, & x = \frac{\cos^3 \psi}{\sin \psi} \sqrt{\frac{a}{3}}; \end{cases}$$

formules qui semblent inexactes; appliquons-les à l'équation

$$(1) \quad x^3 + x - 2 = 0.$$

On a

$$a = 1, \quad b = 2, \quad \tan \varphi = \sqrt{\frac{1}{8}},$$

$$\sin \psi = \sqrt[3]{\tan \frac{\varphi}{2}}, \quad x = \frac{\cos^3 \psi}{\sin \psi} \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Calcul de φ .	Calcul de ψ .	Calcul de x .
$\log \frac{1}{8} = \bar{1},0969100$	$\log \tan \frac{\varphi}{2} = \bar{1},2344487$	$\log \frac{1}{3} = \bar{1},5228787$
$\log \tan \varphi = \bar{1},5484550$	$\log \sin \psi = \bar{1},7448162$	$+ \log \sqrt{\frac{1}{3}} = \bar{1},7614393$
$\varphi = 19^{\circ}28'16'',4$	$\psi = 33^{\circ}45'24'',5$	$+ \log \cos^3 \psi = \bar{1},7594357$
$\frac{1}{2} \varphi = 9^{\circ}44'08'',2$	$\log \cos \psi = 1,9198119$	$- \log \sin \psi = 0,2551838$
		$\log x = \bar{1},7760588$
		$x = 0,59711.$

Résultat évidemment inexact, car l'unique racine réelle de l'équation (1) est $+1$.

2. Pour rectifier les formules (A), reprenons les formules données par Cagnoli (*Trigonométrie*, p. 201), et qui se trouvent dans le tome IX des *Nouvelles Annales*, p. 377, ligne 13, le second membre de la formule (3) devant être changé de signe.

a et b étant positifs, l'unique racine réelle de

$$x^3 + ax - b = 0$$

est donnée par le système suivant :

$$(B) \begin{cases} 0 < \varphi < 90^\circ, & \text{tang} \varphi = \frac{2}{b} \left(\frac{a}{3} \right)^{\frac{3}{2}}. \\ 0 < \epsilon < 90^\circ, & \text{tang} \epsilon = \sqrt[3]{\text{tang} \frac{1}{2} \varphi}, \quad x = \cot . 2\epsilon \sqrt{\frac{a}{3}}. \end{cases}$$

$\text{tang} \frac{1}{2} \varphi$ se trouvant compris entre 0 et 1, il en est de même de $\text{tang} \epsilon$; on peut poser

$$0 < \psi < 90^\circ, \quad \sin \psi = \text{tang} \epsilon;$$

on en déduit

$$\cot 2\epsilon = \frac{1}{\text{tang} 2\epsilon} = \frac{1 - \text{tang}^2 \epsilon}{2 \text{tang} \epsilon} = \frac{\cos^2 \psi}{2 \sin \psi},$$

d'où le système suivant :

$$(C) \begin{cases} 0 < a, \quad 0 < b, \quad x^3 + ax - b = 0; \\ 0 < \varphi < 90^\circ, \quad \text{tang} \varphi = \frac{2}{b} \left(\frac{a}{3} \right)^{\frac{3}{2}}, \\ \sin \psi = \sqrt[3]{\text{tang} \frac{\varphi}{2}}, \quad x = \frac{\cos^2 \psi}{\sin \psi} \sqrt{\frac{a}{3}}, \end{cases}$$

Le système (C) doit être substitué au système (A), où l'erreur est due probablement à des fautes d'impression.

3. Appliquons les formules (C) à l'équation (1) :

$$\operatorname{tang} \varphi = \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \right)^3, \quad \sin \psi = \sqrt[3]{\operatorname{tang} \frac{\varphi}{2}}, \quad x = \frac{\cos^2 \psi}{\sin \psi} \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Calcul de φ .	Calcul de ψ .	Calcul de x .
$\log \frac{1}{3} = \bar{1},5228787$	$\log \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2} = \bar{2},9793213$	$+\log \cos^2 \varphi = \bar{1},8983344$
$\log \sqrt{\frac{1}{3}} = \bar{1},76143935$	$\log \sin \psi = \bar{1},6597738$	$-\log \sin \psi = 0,3402262$
$\log \operatorname{tang} \varphi = \bar{1},2843180$	$\psi = 27^{\circ} 11' 02'', 6$	$+\log \sqrt{\frac{1}{3}} = \bar{1},7614393$
$\varphi = 10^{\circ} 53' 36'', 2$	$\log \cos \psi = \bar{1},9491672$	$\log x = 1,9999999$
$\frac{\varphi}{2} = 5^{\circ} 26' 48'', 1$		$x = 1.$