

HOUSEL

**Note sur la simplification et la vérification
des calculs relatifs au théorème de
Sturm (voir p. 240)**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 6
(1867), p. 351-354

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__351_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1867, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**NOTE SUR LA SIMPLIFICATION ET LA VÉRIFICATION DES
CALCULS RELATIFS AU THÉOREME DE STURM**

(voir p. 240),

PAR M. HOUSEL.

Si l'on substitue des unités dans l'équation proposée par Sturm

$$X = 10x^4 - 5x^3 - 76x^2 + 58x - 11 = 0,$$

on voit d'abord qu'il y a une racine négative comprise entre -2 et -3 : on reconnaît même qu'il n'y en a pas d'autre ; car, si l'on change x en $-x$, l'équation se divise en deux parties consécutives de signe différent.

On observe aussi qu'il y a une racine positive entre 2 et 3. Quant aux deux autres, on peut en soupçonner la réalité à cause du théorème de Rolle, car l'équation dérivée

$$X' = 40x^3 - 15x^2 - 152x + 58 = 0$$

a une racine comprise entre 0 et 1 ; or, si les quatre racines de $X = 0$ sont réelles, on sait que les deux dernières sont aux environs de cette valeur ; mais le théorème de Sturm peut seul montrer d'avance qu'en effet ces racines existent, et même qu'elles sont aussi comprises entre 0 et 1.

Cependant la substitution des dixièmes, des centièmes et même des millièmes ne suffit pas pour les séparer. Mais comme on s'aperçoit que les valeurs de X sont plus petites pour $x = 0,38$ et $x = 0,382$ qui donnent successivement

$$X = -0,0002464 \quad \text{et} \quad X = -0,00000070224,$$

on voit que c'est aux environs de ces valeurs qu'il faudra substituer d'abord des millièmes, puis des dix-millièmes.

En effet,

$$x = 0,3819$$

donne

$$X = 0,000001006951376.$$

On trouvera de même que l'autre racine est comprise entre 0,3817 et 0,3818.

Du reste, cette équation en particulier est facile à résoudre si l'on songe à décomposer le polynôme du quatrième degré en facteurs rationnels du second; on a alors

$$\begin{aligned} 10x^4 - 5x^3 - 762^2 + 58x - 11 \\ = (x^2 - 3x + 1)(10x^2 + 25x - 11), \end{aligned}$$

ce qui donne les quatre racines

$$\begin{aligned} x_1 = 2,61803, \quad x_2 = 0,38196, \\ x_3 = 0,38172, \quad x_4 = -2,88172. \end{aligned}$$

Pour venir à l'objet de cette Note, observons que la meilleure réponse à faire aux objections sur la difficulté des calculs qu'entraîne la méthode de Sturm consiste assurément à donner un moyen de les simplifier, et surtout de les vérifier.

Voici comment y parvenait feu M. Binet, professeur au collège Bourbon, actuellement lycée Bonaparte. Il suffit de démontrer le théorème suivant :

Si l'on divise un polynôme

$$A = ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + dx^{m-3} + \dots$$

par un autre polynôme

$$B = a'x^{m-1} + b'x^{m-2} + c'x^{m-3} + d'x^{m-4} + \dots,$$

dont le degré est inférieur d'une unité, le facteur a'^2 ,

que l'on introduit pour faciliter la division, se retrouve dans le second reste R' obtenu en divisant B par le premier reste R .

En faisant la division indiquée par

$$a'^2 A = BQ + R,$$

on trouve

$$Q = aa'x + a'b - ab';$$

soit

$$R = a''x^{m-2} + b''x^{m-3} + \dots,$$

on a aussi

$$a'' = a'(a'c - ac') - b'(a'b - ab')$$

et

$$b'' = a'(a'd - ad') - c'(a'b - ab').$$

La seconde division est indiquée par

$$a''^2 B = Q'R + R'$$

en posant

$$Q' = a'a''x + a''b' - a'b''.$$

On a

$$R' = a''^2 B - Q'R = -a'^2 Q'A + B(a''^2 + QQ').$$

Par conséquent, le théorème de M. Binet sera démontré si l'on fait voir que $a''^2 + QQ'$ est divisible par a'^2 . Or, on a

$$\begin{aligned} a''^2 + QQ' &= [a'(a'c - ac') - b'(a'b - ab')]^2 \\ &\quad + (aa'x + a'b - ab')(a'a''x + a''b' - a'b''). \end{aligned}$$

En développant le second membre, nous laisserons de côté les termes où se trouve le facteur a'^2 , tels que

$$a'^2(a'c - ac')^2 \quad \text{et} \quad a'^2x^2 \cdot aa''.$$

Les termes en x seront

$$a'x[a(a''b' - a'b'') + a''(a'b - ab')];$$

on pourra aussi les mettre de côté, puisque ceux qui ne contiennent pas a'^2 se détruisent. Il reste donc, en supprimant encore le facteur commun $a'b - ab'$, la quantité

$$b'^2(a'b - ab') - 2a'b'(a'c - ac') + a''b' - a'b''.$$

Dans $a''b' - a'b''$, supprimant encore

$$- a'^2(a'd - ad'),$$

il reste

$$\begin{aligned} b'^2(a'b - ab') - 2a'b'(a'c - ac') + a'b'(a'c - ac') \\ - b'^2(a'b - ab') + a'c'(a'b - ab'), \end{aligned}$$

ce qui revient à

$$- a'b'(a'c - ac') + a'c'(a'b - ab') = a'^2(bc' - b'c).$$

On voit enfin que R' est divisible par a'^2 .

Comme a' et a'' n'ont point, en général, de facteur commun, la suppression du facteur a'^2 dans R' n'empêchera pas R'' d'être divisible par a''^2 .

Ce théorème est toujours vrai, même quand B n'est pas la dérivée de A . Du reste, voici, dans l'exemple cité, les polynômes de Sturm, simplifiés par le théorème de M. Binet :

$$X = 10x^4 - 5x^3 - 76x^2 + 58x - 11,$$

$$X' = 40x^3 - 15x^2 - 152x + 58,$$

$$X_1 = 1231x^2 - 1240x + 294,$$

$$X_2 = 6443876x - 2460539 \text{ (après division par } 32 = 2 \cdot 4^2),$$

$$X_3 = 1065 \text{ (après division par } 1515361 = (1231)^2).$$