

Note sur la question proposée au concours d'admission à l'École polytechnique (année 1866)

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 6 (1867), p. 258-260

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__258_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1867, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE

sur la question proposée au concours d'admission à l'École Polytechnique
(année 1866).

1. Si x et y représentent les coordonnées du pied (sur l'hyperbole) d'une normale commune aux deux courbes considérées, la valeur de x doit vérifier l'équation

$$(1) \quad px^7 - 2m^4x^4 + 2pm^4x^3 + 2m^8 = 0,$$

qui admet une racine réelle *négative*, et au plus deux racines positives.

A chaque valeur réelle de x correspond une valeur réelle de y donnée par $xy = m^2$; donc le nombre des normales communes est au moins *un*, et au plus *trois*.

2. En remplaçant dans l'équation (1) x par pz et m^4 par p^4h , il vient

$$(2) \quad z^7 - 2hz^3(z - 1) + 2h^2 = 0,$$

(*) Je ne reproduis pas ces figures, que chacun peut se représenter. P.

d'où

$$(3) \quad h = \frac{z^3}{2} [z - 1 \pm \sqrt{(z-2)^2 - 3}].$$

La quantité h ou $\frac{m^4}{p^4}$ étant réelle et positive, l'équation (3) montre que z ne peut avoir une valeur positive moindre que $2 + \sqrt{3}$ (*). D'autre part, il est évident que pour toute racine positive de l'équation (2), on a

$$2h(z-1) > z^4,$$

inégalité qui donne

$$2h > \frac{z^4}{z-1} > z^3 + z^2 + z + 1,$$

ou, parce que z est au moins égale à $2 + \sqrt{3}$,

$$2h > (2 + \sqrt{3})^3 + (2 + \sqrt{3})^2 + (2 + \sqrt{3}) + 1,$$

$$2h > 36 + 20\sqrt{3} > 70,$$

et par suite

$$h > 35, \quad \frac{m^4}{p^4} > 35, \quad 7p^4 < \frac{m^4}{5}.$$

Il n'y aura donc qu'une seule normale commune, si $7p^4$ est plus grand que $\frac{m^4}{5}$, et à plus forte raison si on a $7p^4 > 2m^4$.

3. Mais l'inégalité $h > 35$ n'exprime pas une condition suffisante pour que le nombre des normales communes soit *trois*; car la plus petite valeur entière que h puisse avoir lorsqu'il y a trois normales communes est 63. Cela résulte du calcul suivant.

(*) Par conséquent le minimum des valeurs positives de l'abscisse x est $p(2 + \sqrt{3})$.

En posant

$$h = \alpha z^3 \quad \text{et} \quad z = \frac{2\alpha(\alpha + 1)}{2\alpha - 1},$$

l'équation (2) est vérifiée, quel que soit α . Pour que z et h soient positifs, il faut prendre $\alpha > \frac{1}{2}$.

La dérivée de h par rapport à α est

$$\frac{8\alpha^3(\alpha + 1)^2}{(2\alpha - 1)^4} (8\alpha^2 - 5\alpha - 4);$$

en l'égalant à zéro, l'équation qui en résulte admet pour racine positive $\frac{5 + \sqrt{153}}{16} = 1,08, \dots$, et cette racine détermine le minimum des valeurs positives de h correspondantes à des valeurs positives de z . Pour $\alpha = 1,08, \dots$, on a $z = 3,86, \dots$, et, en remplaçant α et z par leurs valeurs dans l'équation $h = \alpha z^3$, on trouve $h > 62$ et $h < 63$; ainsi, en nombres entiers, le minimum de h est 63.

Lorsque h ou $\frac{m^4}{p^4}$ est égal à 63, les deux racines positives de l'équation

$$(1) \quad px^7 - 2m^4x^4 + 2pm^4x^3 + 2m^8 = 0$$

sont comprises, l'une entre $p \times 3,8$ et $p \times 3,9$, et l'autre entre $p \times 3,9$ et $4p$.

Si $\frac{m^4}{p^4} = 64$, la plus grande des deux racines positives de l'équation est $4p$, et la plus petite est comprise entre $p \times 3,7$ et $p \times 3,8$. G.
