NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PICART

Nouvelle théorie du déplacement continu d'un corps solide

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 158-168

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__158_0>

NOUVELLE THÉORIE DU DÉPLACEMENT CONTINU D'UN CORPS SOLIDE;

PAR M. PICART.

1. On peut considérer un corps solide en mouvement comme une figure géométrique qui se déplace d'une manière continue en restant constamment égale à elle-même, et, à ce point de vue, comme l'égalité de deux figures est un cas particulier de l'homographie, la question du déplacement d'un corps solide apparaît comme une face du problème plus général de la déformation homographique continue d'une figure géométrique quelconque.

2. Si l'on désigne par x, y, z les coordonnées d'un point d'une figure, et par X, Y, Z les coordonnées du point homologue de la figure homographique, on sait que la correspondance des deux figures est définie par les relations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= \frac{Ax + By + Cz + H}{mx + ny + pz + 1},\\ Y &= \frac{A'x + B'y + C'z + H'}{mx + ny + pz + 1},\\ Z &= \frac{A''x + B''y + C''z + H''}{mx + ny + pz + 1};\end{aligned}\right.$$

le plan représenté par l'équation

$$mx + ny + pz + 1 = 0$$

correspond, dans la première figure, aux points à l'infini de la seconde.

Si les points homologues de deux figures sont tous à distance finie, ce plan doit être à l'infini, et les formules (1) peuvent s'écrire, dans ce cas,

$$(2)\qquad \begin{cases} X - x = A_1 x + B y + C z + H, \\ Y - y = A'_1 x + B' y + C' z + H', \\ Z - z = A''_1 x + B'' y + C'' z + H''. \end{cases}$$

3. Supposons maintenant que les deux figures soient infiniment voisines : cela revient à dire que les douze coefficients $A_1, B, C, H, A'_1, B', C', H', A''_1, B'', C'', H''$ sont infiniment petits. Désignons ces coefficients par da, db, dc, dh, da', db', dc', dh', da'', db'', dc'', dh'', et par dx, dy, dz les différences infiniment petites $X - x$, $Y - y$, $Z - z$. Les formules (2) deviendront

$$(3)\qquad \begin{cases} dx = x da + y db + z dc + dh, \\ dy = x da' + y db' + z dc' + dh', \\ dz = x da'' + y db'' + z dc'' + dh''. \end{cases}$$

Ces équations expriment les variations infiniment petites des coordonnées de chaque point d'une figure lorsque cette figure se déforme infiniment peu, en restant homographique à elle-même ; et si l'on suppose que les coefficients da, db, dc, dh, da', db', dc', dh', da'',... soient des fonctions du temps, elles formulent la loi la plus générale de la déformation homographique continue d'une figure.

Il serait facile de déduire de ces formules un grand nombre de propriétés géométriques de cette déformation. Mais nous laisserons de côté cette étude générale pour arriver tout de suite au cas particulier, plus intéressant, du déplacement continu d'une figure invariable.

4. Il faut d'abord chercher quelles doivent être les valeurs des coefficients da, db,..., pour que la figure, dans son déplacement infiniment petit, reste égale à elle-

même. Il suffit d'exprimer que la distance de deux points quelconques (x, y, z), (x', y', z') de la figure est invariable. Or, le carré de cette distance est, en coordonnées rectangulaires,

$$(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2;$$

on doit donc avoir

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} &(x'-x)(dx'-dx) + (y'-y)(dy'-dy) \\ &\qquad + (z'-z)(dz'-dz) = 0, \end{aligned} \right.$$

ou, remplaçant dx, dy, dz par leurs valeurs (3) en x, y, z et dx', dy', dz' par leurs valeurs semblables en x', y', z',

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} &(x'-x)^2 da + (y'-y)^2 db' + (z'-z)^2 dc'' \\ &\qquad + (x'-x)(y'-y)(db + da') \\ &\qquad + (x'-x)(z'-z)(dc + da'') \\ &\qquad + (y'-y)(z'-z)(dc' + db'') = 0, \end{aligned} \right.$$

et cela quels que soient x, y, z et x', y', z'. Par suite,

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{lll} da = 0, & db' = 0, & dc'' = 0, \\ db + da' = 0, & dc + da'' = 0, & dc' + db'' = 0. \end{array} \right.$$

Les formules relatives au déplacement continu d'une figure invariable sont donc

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} dx &= y\,db' + z\,dc + dh, \\ dy &= -x\,db + z\,dc' + dh', \\ dz &= -x\,dc - y\,dc' + dh''. \end{aligned} \right.$$

Les coefficients de x, y, z forment les éléments du déterminant gauche symétrique

$$(8) \quad \begin{vmatrix} 0 & db & dc \\ -db & 0 & dc' \\ -dc & -dc' & 0 \end{vmatrix};$$

or, on sait qu'un déterminant gauche symétrique d'ordre impair est égal à o, ce qui se voit immédiatement si l'on remarque que le changement des lignes en colonnes et des colonnes en lignes, qui n'altère pas un déterminant, a ici pour effet de changer les signes de tous les éléments et par conséquent le signe du déterminant lui-même. On en conclut que, dans le déplacement infiniment petit le plus général d'une figure invariable, *il n'y a pas de point sans vitesse.*

5. Si les termes dh, dh', dh'' sont constamment nuls, les formules (7), qui deviennent

$$(9)\qquad \begin{cases} dx = ydb + zdc, \\ dy = -xdb + zdc', \\ dz = -xdc - ydc', \end{cases}$$

représentent le mouvement d'une figure invariable autour d'un point fixe qui est ici l'origine des coordonnées, et si les quantités dc, dc', dh'' sont constamment nulles, les mêmes formules (7), qui se réduisent à

$$(10)\qquad \begin{cases} dx = ydb + dh, \\ dy = -xdb + dh', \\ dz = 0, \end{cases}$$

représentent le déplacement d'une figure invariable parallèlement à un plan qui est ici le plan des xy.

6. Revenons au mouvement le plus général exprimé par les formules (7).

Le déterminant (8) étant nul, il existe des valeurs de λ, μ, ν propres à vérifier le système d'équations

$$(11)\qquad \begin{cases} \lambda.0 - \mu db - \nu dc = 0, \\ \lambda.db + \mu.0 - \nu dc' = 0, \\ \lambda.dc + \mu dc' + \nu.0 = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire qu'il existe des facteurs λ, μ, ν tels, qu'en multipliant la première des équations (7) par λ, la deuxième par μ, la troisième par ν, et ajoutant ensuite ces trois équations, on obtienne un résultat indépendant de x, y, z. Or, ces facteurs peuvent toujours être regardés comme les cosinus des angles α, β, γ qu'une certaine direction faite avec les axes de coordonnées, et alors

$$dx\cos\alpha + dy\cos\beta + dz\cos\gamma$$

est la projection du déplacement du point (x, y, z) sur la direction (α, β, γ). D'où l'on conclut qu'*il existe une direction* (α, β, γ) *sur laquelle les déplacements des différents points de la figure ont des projections égales.*

On trouve

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{dc'}{\sqrt{db^2 + dc^2 + dc'^2}}, \\ \cos\beta &= -\frac{dc}{\sqrt{db^2 + dc^2 + dc'^2}}, \\ \cos\gamma &= \frac{db}{\sqrt{db^2 + dc^2 + dc'^2}}. \end{aligned}\right.$$

Prenons pour axe des z une parallèle à la direction (α, β, γ) : cela revient à supposer

$$dc = 0, \quad dc' = 0,$$

et les formules (7) se mettent sous la forme

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} dx &= ydb + dh, \\ dy &= -xdb + dh', \\ dz &= dh''. \end{aligned}\right.$$

Les deux premières de ces équations, tout à fait semblables aux deux premières des équations (10), montrent que le déplacement, estimé parallèlement au plan des xy, peut être regardé comme produit par une rotation autour d'un axe parallèle à l'axe des z.

De là ce résultat bien connu, énoncé pour la première fois par Poinsot en 1834, que *tout déplacement infiniment petit d'une figure invariable peut être produit par un mouvement de rotation instantané autour d'un axe qui glisse infiniment peu sur lui-même.*

En prenant l'axe de rotation pour axe des z, on a les formules simples

$$(14) \qquad \begin{cases} dx = y\,db, \\ dy = -x\,db, \\ dz = dh'', \end{cases}$$

dans lesquelles db est la *quantité angulaire de rotation*, et dh'' la *quantité de glissement*.

Des formules (7) et (14) on peut déduire sans difficulté toutes les propriétés géométriques du déplacement infiniment petit d'un corps solide, en tant qu'il ne s'agit que des vitesses des différents points du corps, propriétés qui font l'objet d'un beau Mémoire de M. Chasles (*Comptes rendus*, 26 juin 1843).

7. Mais hâtons-nous de passer à un sujet moins étudié, à la question des accélérations.

Les équations (7) différentiées donnent

$$(15) \qquad \begin{cases} d^2x = y d^2 b + z d^2 c + dy\,db + dz\,dc + d^2 h, \\ d^2y = -x d^2 b + z d^2 c' - dx\,db + dz\,dc' + d^2 h', \\ d^2z = -x d^2 c - y d^2 c' - dx\,dc - dy\,dc' + d^2 h'', \end{cases}$$

ou, en remplaçant dx, dy, dz par leurs valeurs (7),

$$(16) \qquad \begin{cases} d^2x = -(db^2 + dc^2)\,x + (d^2 b - dc\,dc')\,y \\ \qquad\quad + (d^2 c + db\,dc')\,z + db\,dh' + dc\,dh'' + d^2 h, \\ d^2y = -(d^2 b + dc\,dc')\,x - (db^2 + dc'^2)\,y \\ \qquad\quad + (d^2 c' - db\,dc)\,z - db\,dh + dc'\,dh'' + d^2 h', \\ d^2z = -(d^2 c - db\,dc')\,x - (d^2 c' + db\,dc)\,y \\ \qquad\quad - (dc^2 + dc'^2)\,z - dc\,dh - dc'\,dh' + d^2 h''. \end{cases}$$

Si l'on prend pour axe des z l'axe instantané glissant, il faut faire dans ces équations

$$dc = 0, \quad dc' = 0, \quad dh = 0, \quad dh' = 0;$$

elles deviennent ainsi

$$(17) \quad \begin{cases} d^2x = -xdb^2 + yd^2b + zd^2c + d^2h, \\ d^2y = -xd^2b - ydb^2 + zd^2c' + d^2h', \\ d^2z = -xd^2c - yd^2c' + z.0 + d^2h''. \end{cases}$$

Les coefficients de x, y, z sont les éléments du déterminant gauche

$$\begin{vmatrix} -db^2 & d^2b & d^2c, \\ -d^2b & -db^2 & d^2c' \\ -d^2c & -d^2c & 0 \end{vmatrix}.$$

La valeur de ce déterminant est

$$-db^2(d^2c^2 + d^2c'^2);$$

elle ne s'annule que pour

$$db = 0,$$

ou

$$d^2c = 0, \quad d^2c' = 0,$$

c'est-à-dire seulement dans le cas où le corps n'a qu'un mouvement de translation et dans celui où l'axe instantané conserve la même direction. Donc, dans le déplacement continu le plus général d'un corps solide, *il existe un point dont l'accélération est nulle*. Les coordonnées de ce point sont fournies par les équations

$$(18) \quad \begin{cases} xdb^2 - yd^2b - zd^2c = d^2h, \\ xd^2b + ydb^2 - zd^2c' = d^2h', \\ xd^2c + yd^2c' = d^2h''. \end{cases}$$

8. Pour déterminer sa position, il faut d'abord fixer

la signification géométrique des quantités d^2c, d^2c', d^2h, d^2h', d^2h''.

On voit facilement, en différentiant les formules (12), que, $-d\alpha$ et $-d\beta$ étant les compléments des angles que le nouvel axe instantané fait avec les axes des x et des y, on a

$$(19)\qquad d^2c = db\,d\beta,\quad d^2c' = -db\,d\alpha.$$

Si l'on prend pour plan des yz un plan parallèle à ce nouvel axe, $d\alpha$ sera nul, et par suite on aura

$$d^2c' = 0.$$

$d\beta$ sera l'angle que forment les deux axes instantanés consécutifs; par conséquent d^2c sera *le produit de la quantité de rotation instantanée db par l'angle infiniment petit dβ des deux axes consécutifs.*

Les quantités d^2h, d^2h' sont les déplacements parallèles aux axes des x et des y que subit l'origine des coordonnées par la rotation autour du nouvel axe instantané. Si l'on prend pour origine des coordonnées le pied de la plus courte distance des deux axes et qu'on désigne par dp cette plus courte distance, on reconnaît immédiatement que

$$(20)\qquad d^2h = 0,\quad d^2h' = db.dp.$$

Quant à d^2h'', c'est la *variation de la quantité de glissement dh''.*

Lors donc qu'on prend pour axe des z l'axe instantané glissant, pour plan des yz le plan parallèle aux deux axes instantanés consécutifs, et pour origine le pied de la plus courte distance de ces deux axes, les formules qui donnent l'accélération prennent la forme

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} d^2x &= -x\,db^2 + y\,d^2b + z\,db\,d\beta,\\ d^2y &= -x\,d^2b - y\,db^2 + db\,dp,\\ d^2z &= -x\,db\,d\beta + d^2h''.\end{aligned}\right.$$

Par suite, le *point sans accélération* a pour coordonnées

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{d^2h''}{db\,d\beta}, \\ y &= \frac{dp}{db} - \frac{d^2h''\,d^2b}{d\beta\,db^3}, \\ z &= \frac{d^2h''}{b\beta^2} - \frac{dp.d^2b}{d\beta\,db^2} + \frac{d^2h''\,d^2b^2}{d\beta^2db^4}. \end{aligned}\right.$$

9. Si l'on transporte l'origine en ce point sans changer la direction des axes de coordonnées, les formules de l'accélération deviennent

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} d^2x &= -xdb^2 + yd^2b + zdb\,d\beta, \\ d^2y &= -xd^2b - ydb^2, \\ d^2z &= -xdb\,d\beta. \end{aligned}\right.$$

Elles ne sont autres que celles qui exprimeraient l'accélération des différents points du corps si celui-ci tournait sans glissement, avec la même vitesse de rotation, autour d'un axe passant par l'origine des coordonnées, et parallèle, dans ses deux positions consécutives, à l'axe instantané glissant. On appelle, pour cette raison, le point sans accélération *centre des accélérations*.

10. La dernière des équations (23) montre que l'accélération d'un point, estimée parallèlement à l'axe instantané, est proportionnelle à la distance de ce point au plan passant par le centre des accélérations et parallèle aux deux axes instantanés consécutifs.

Si l'on multiplie la première des équations (23) par x, la deuxième par y et la troisième par z, et qu'on les ajoute, on obtient

$$xd^2x + yd^2y + zd^2z = -db^2(x^2 + y^2),$$

ou, en désignant par r la distance de l'origine au point

x, y, z, et par ρ la distance de ce point à l'axe des z,

$$(24) \qquad \frac{x}{r}d^2x + \frac{y}{r}d^2y + \frac{z}{r}d^2z = -db^2 . \frac{\rho^2}{r}.$$

De là le théorème suivant : *La composante de l'accélération dans le sens du rayon vecteur d'un point du corps est directement proportionnelle au carré de la distance de ce point à l'axe des z, et en raison inverse de sa distance à l'origine.*

11. Les formules (21) ou (23), jointes aux formules (14), fournissent immédiatement la solution d'une série de questions sur les accélérations, comme par exemple le lieu des points sans accélération tangentielle ou sans accélération normale, le lieu des points dont l'accélération normale est perpendiculaire ou parallèle à l'axe instantané, etc. Elles font connaître le plan osculateur et le rayon de courbure de la trajectoire de chaque point du corps, et elles permettent, connaissant les trajectoires de deux des points du corps et la surface sur laquelle s'appuie constamment un troisième point, de déterminer tous les éléments nécessaires à la construction de ce plan osculateur et de ce rayon de courbure.

On peut consulter à ce sujet un Mémoire intéressant de M. Resal, inséré au XXXVII^e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique,* ou le *Traité de Cinématique pure* du même auteur.

12. Le calcul des *suraccélérations*, et en général des accélérations de divers ordres, se ferait comme celui des accélérations simples, en différentiant successivement les équations (7) qui expriment les composantes des déplacements parallèles aux axes de coordonnées.

Nous n'entrerons pas dans ces développements, le but de ce travail étant seulement d'établir, par un procédé nouveau, les formules propres à la résolution de toutes les questions que l'on peut se poser sur le déplacement continu d'un système invariable.