PAINVIN

Sur un certain lieu géométrique

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 553-555

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__553_0>

SUR UN CERTAIN LIEU GÉOMÉTRIQUE;

PAR M. PAINVIN.

1. Dans l'avant-dernier numéro des *Nouvelles Annales* (année 1866, p. 444), M. Le Besgue a repris, par une autre méthode, la question que j'avais traitée p. 481, année 1864, savoir : la détermination du lieu des foyers des sections centrales, dans une surface du second ordre. M. Le Besgue arrive à une équation qui diffère de celle que j'ai trouvée par le double signe du second membre, et il termine (p. 449, 1866) en se demandant s'il faut toujours prendre le signe supérieur.

Le principe qui a servi de point de départ à mon analyse (p. 481, année 1864) déterminant tous les foyers, le calcul se développant naturellement sans introduire ni supprimer de solution, je dois en conclure *à priori* que l'équation du lieu cherché ne peut pas renfermer de double signe. Mais il est bon de rechercher la cause de la divergence signalée.

Si nous nous arrêtons au premier alinéa de la page 446 (année 1866), nous conclurons avec M. Le Besgue que les foyers de la section faite par le plan

$$mx + ny + pz = 0$$

sont déterminés par les trois équations

$$\text{(I)} \qquad mx + ny + pz = 0,$$

$$\text{(II)} \qquad m\alpha yz + n\beta zx + p\gamma xy = 0,$$

$$\text{(III)} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \pm \frac{\sqrt{M^2 - 4LN}}{L}.$$

Regardant pour un instant m, n, p comme des quantités connues, nous voyons d'abord que le plan (I) coupe le cône (II) suivant deux droites rectangulaires qui sont les axes de la section; chacune de ces droites rencontre en deux points chacune des deux sphères représentées par l'équation (III). Ainsi, en déterminant les foyers à l'aide des équations précédentes, on arrive à cette conclusion inadmissible que la section faite par le plan considéré possède huit foyers. Recherchons donc d'une manière plus précise la véritable signification de ce groupe d'équations.

Rappelons-nous que le carré de la distance d'un foyer au centre est égal au carré du demi-axe sur lequel se trouve ce foyer, moins le carré de l'autre demi-axe (il s'agit toujours de la valeur algébrique des carrés des axes); cette différence, prise en sens contraire, donne le carré de la distance du foyer situé sur l'autre axe. Or, si nous considérons *une* des droites définies par les équations (I) et (II), cette droite rencontre les sphères (III) en quatre points; deux de ces points sont les foyers situés sur l'axe considéré; les deux autres points d'intersection ne sont pas des foyers, mais leur distance (réelle ou imaginaire) au centre est égale à la distance à ce même centre des foyers situés sur l'*autre* axe de la section. Cette ambiguïté que présentent les équations (I), (II), (III) persiste jusqu'à la fin du calcul, p. 446, 447, 448; et l'équation (a), p. 448, à laquelle M. Le Besgue se trouve conduit, résout cette double question :

1° Trouver le lieu des foyers des sections centrales.

2° Sur *un* des axes de la section on prend un point à une distance du centre égale à celle du foyer qui se trouve sur l'*autre* axe : trouver le lieu de ces points.

La méthode indiquée à la page 444 présente donc le grave inconvénient de mêler ces deux questions. Peut-on faire disparaître cette ambiguïté sans détruire l'élégante analyse de M. Le Besgue? C'est un point que je n'ai pas examiné. D'ailleurs, on vérifie très-aisément que les coordonnées des foyers des sections passant par les axes de la surface ne satisfont pas à l'équation (a), p. 448, lorsqu'on prend le signe — dans le second membre.

2. Je ferai des mêmes remarques sur la question de la page 161, année 1865. M. Le Besgue termine cet article en disant : « Il serait bon d'examiner si la définition du foyer (un cercle de rayon nul.....) peut donner les deux signes. »

Je répondrai à cela que, dans la question posée, le double signe ne doit pas exister.

Reprenons, en effet, les deux relations

$$\text{(I)}\quad 2(C\cos\theta - B)t - (A - C) = \pm\sqrt{(A-C)^2\sin^2\theta + [(A+C)\cos\theta - 2B]^2},$$

$$\text{(II)}\quad r^2 = \frac{A + C - 2B\cos\theta \pm \sqrt{(A-C)^2\sin^2\theta + [(A+C)\cos\theta - 2B]^2}}{2(AC - B^2)},$$

qui se trouvent, la première au haut de la page 162, année 1865, la deuxième au haut de la page 163.

Je remarque d'abord que les signes + et — doivent se correspondre dans ces deux égalités; on le constate en cherchant la longueur de l'axe correspondant à une des valeurs de t. Or, le carré de la distance d'un foyer au centre est égal au carré du demi-axe sur lequel se trouve ce foyer, moins le carré de l'autre demi-axe. Donc, si le foyer considéré se trouve sur l'axe dont la direction t correspond au signe + du radical, le carré de sa distance au centre contiendra également ce radical avec le signe + ; la même conclusion a lieu pour le signe —. Il résulte de là que l'équation (7), p. 163, obtenue par M. Le Besgue, ne doit pas présenter un double signe.