HERMITE

Sur le rayon de courbure des courbes gauches

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 297-298

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__297_1>

SUR LE RAYON DE COURBURE DES COURBES GAUCHES;

PAR M. HERMITE.

On donne dans l'enseignement un calcul un peu long pour déduire de la formule

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{ds}$$

l'expression du carré de l'inverse du rayon de courbure au moyen des coordonnées x, y, z et de l'arc s, savoir :

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{ds^6}\left[(dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2 + (dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2\right],$$

la variable indépendante étant quelconque. On peut l'abréger comme il suit.

(*) $(3C_3\theta)$ se divise en trois systèmes dont les caractéristiques sont 2 et 4 (voir la note du n° 20).

Soit pour un instant

$$a = \frac{dx}{ds}, \quad b = \frac{dy}{ds}, \quad c = \frac{dz}{ds},$$

et faisons

$$a' = a + da, \quad b' = b + db, \quad c' = c + dc,$$

l'angle de contingence $d\varphi$, sera donné par la formule relative au sinus, savoir :

$$\sin^2 d\varphi = (ab' - ba')^2 + (ac' - ca')^2 + (bc' - cb')^2;$$

de sorte que l'on aura immédiatement $d\varphi^2$ en calculant les expressions $ab' - ba'$, etc. Or on trouve :

$$\begin{aligned} ab' - ba' &= a(b + db) - b(a + da), \\ &= a\,db - b\,da, \\ &= \frac{dx}{ds}\,d\frac{dy}{ds} - \frac{dy}{ds}\,d\frac{dx}{ds}, \end{aligned}$$

et cette dernière expression donne lieu à la réduction suivante :

$$\frac{dx}{ds}\,\frac{d^2y\,ds - dy\,d^2s}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\,\frac{d^2x\,ds - dx\,d^2s}{ds^2}$$
$$= \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{ds^3}.$$

On a donc par un calcul bien facile

$$ab' - ba' = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{ds^3},$$

et semblablement

$$ac' - ca' = \frac{dx\,d^2z - dz\,d^2x}{ds^3},$$

$$bc' - cb' = \frac{dy\,d^2z - dz\,d^2y}{ds^3},$$

d'où suit comme on voit la formule annoncée.