

MIRZA-NIZAM

Théorème sur les déterminants

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 4
(1865), p. 500-504

[<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__500_1>](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__500_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1865, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORÈME SUR LES DÉTERMINANTS;

PAR M. MIRZA-NIZAM.

M. Michael Roberts a énoncé dans les *Nouvelles Annales* (voir cahier de mars 1864, p. 139, question 694) un théorème sur un déterminant numérique, théorème qui a été démontré dans le cahier de septembre de la même année, p. 395 et 397, de deux façons différentes, par M. Smet-Jamar (du lycée Louis-le-Grand) et

MM. Cornu et Picquet (de l'institution Sainte-Barbe).
Ce théorème n'est qu'un cas particulier du suivant :

Soit

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

une fonction entière de degré n en x . Désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ les n racines de l'équation que l'on obtient en égalant à zéro cette fonction, et par $f'(x)$ la dérivée de cette fonction par rapport à x ; on aura

$$R = (-1)^n \begin{vmatrix} \alpha_1 & x & x & \dots & x \\ x & \alpha_2 & x & \dots & x \\ x & x & \alpha_3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & \alpha_n \end{vmatrix} = f(x) - x f'(x).$$

Solution. — R s'écrit en effet

$$R = \begin{vmatrix} -\alpha_1 & -x & -x & \dots & -x \\ -x & -\alpha_2 & -x & \dots & -x \\ -x & -x & -\alpha_3 & \dots & -x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -x & -x & -x & \dots & -\alpha_n \end{vmatrix}.$$

Retranchons la dernière colonne de toutes les autres; on obtient

$$R = \begin{vmatrix} x - \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & -x \\ 0 & x - \alpha_2 & 0 & \dots & -x \\ 0 & 0 & x - \alpha_3 & \dots & -x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -(x - \alpha_n) & -(x - \alpha_n) & -(x - \alpha_n) & \dots & -\alpha_n \end{vmatrix}.$$

Divisons la première colonne par $x - \alpha_1$, la deuxième par $x - \alpha_2, \dots$, la $(n - 1)^{ième}$ par $(x - \alpha_{n-1})$, la dernière par x , et divisons aussi la dernière ligne horizontale par

$(x - \alpha_n)$, on obtient

$$R = xf(x) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \dots & -1 \\ 0 & 1 & 0 \dots & -1 \\ 0 & 0 & 1 \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{-1}{x - \alpha_1} & \frac{-1}{x - \alpha_2} & \frac{-1}{x - \alpha_3} \dots & \frac{1}{x} - \frac{1}{x - \alpha_n} \end{vmatrix}.$$

Ajoutant successivement chacune des colonnes à la dernière, on obtient

$$R = xf(x) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{-1}{x - \alpha_1} & \frac{-1}{x - \alpha_2} & \frac{-1}{x - \alpha_3} \dots & \frac{1}{x} - \sum_i \frac{1}{x - \alpha_i} \end{vmatrix}.$$

qui se réduit au produit des éléments de la diagonale

$$R = xf(x) \left(\frac{1}{x} - \sum_i \frac{1}{x - \alpha_i} \right),$$

i recevant toutes les valeurs de 1 à n . Or on a

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_i \frac{1}{x - \alpha_i};$$

donc

$$R = f(x) - xf'(x).$$

C. Q. F. D.

Cas particuliers. — On obtient le théorème de M. Michael Roberts en faisant $x = 1$ et remarquant que les quantités qui ont été désignées ici par $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ont été désignées par M. Michael Roberts par $-\alpha_1, -\alpha_2,$

$-\alpha_3, \dots, -\alpha_n$. On obtient une autre égalité en faisant $x = -1$.

Remplaçons x par l'une des racines simples α_i , on obtient

$$(-1)^n \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_i & \alpha_i \dots & \alpha_i \\ \alpha_i & \alpha_2 & \alpha_i \dots & \alpha_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_i & \alpha_i & \alpha_i \dots & \alpha_n \end{vmatrix} = -\alpha_i f'(\alpha_i),$$

ou, en remarquant que tous les éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne horizontale sont égaux à α_i , on a

$$(-1)^n \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_i \dots & & \alpha_i \\ \alpha_i & \alpha_2 \dots & & \alpha_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_i & \alpha_i & \dots & \alpha_i \\ 1 & 1 & & 1 \\ \alpha_i & \alpha_i \dots & \alpha_{i+1} \dots & \alpha_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_i & \alpha_i \dots & & \alpha_n \end{vmatrix} = -f'(\alpha_i).$$

Soit maintenant β une racine de l'équation $f'(x) = 0$ ne vérifiant pas l'équation $f(x) = 0$. On aura

$$(-1)^n \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta & \beta \dots & \beta \\ \beta & \alpha_2 & \beta \dots & \beta \\ \beta & \beta & \alpha_3 \dots & \beta \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta & \beta & \beta \dots & \alpha_n \end{vmatrix} = f(\beta).$$

De l'équation démontrée, on tire

$$f(x) = (-1)^n \begin{vmatrix} \alpha_1 \dots x \\ \dots \dots \\ x \dots \alpha_n \end{vmatrix} + x f'(x).$$

En décomposant semblablement $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{n-2}(x)$ et remplaçant, on obtient la formule

$$\begin{aligned}
 f(x) = & (-1)^n \begin{vmatrix} \alpha_1 & x & . & x \\ x & \alpha_2 & . & x \\ . & . & . & . \\ x & x & . & \alpha_n \end{vmatrix} + (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} \beta_1 & x & . & x \\ x & \beta_1 & . & x \\ . & . & . & . \\ x & x & . & \beta_{n-1} \end{vmatrix} x \\
 & + (-1)^{n-2} \begin{vmatrix} \gamma_1 & x & . & x \\ x & \gamma_1 & . & x \\ . & . & . & . \\ x & x & . & \gamma_{n-2} \end{vmatrix} x^2 + \dots \\
 & + (-1)^{n-p} \begin{vmatrix} \pi_1 & x & . & x \\ x & \pi_1 & . & x \\ . & . & . & . \\ x & x & . & \pi_{n-p} \end{vmatrix} x^p + \dots \\
 & + (-1)^2 \begin{vmatrix} \lambda_1 & x \\ x & \lambda_2 \end{vmatrix} x^{n-2} + 1.2 \dots n (x - \mu) x^{n-1},
 \end{aligned}$$

où $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1})$ sont les racines de $f'(x) = 0$, $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-2})$ celles de $f''(x) = 0$, (λ_1, λ_2) celles de $f^{n-2}(x) = 0$ et μ la racine de $f^{n-1}(x) = 0$.

On voit par là que $f(x)$ est développée suivant une somme de déterminants.