

PAINVIN

Théorèmes sur les diamètres dans les coniques

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 4
(1865), p. 498-500

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__498_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1865, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORÈMES SUR LES DIAMÈTRES DANS LES CONIQUES;

PAR M. PAINVIN.

Si

$$\begin{aligned} Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 &= 1, \\ A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 &= 1 \end{aligned}$$

sont les équations d'une conique à centre successivement rapportée aux systèmes d'axes xoy , $x'oy'$ dont les angles sont respectivement θ et θ' , on a les relations

$$(I) \quad \frac{B^2 - AC}{\sin^2 \theta} = \frac{B'^2 - A'C'}{\sin^2 \theta'},$$

$$(II) \quad \frac{A + C - 2B \cos \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{A' + C' - 2B' \cos \theta'}{\sin^2 \theta'}.$$

Ces relations expriment, la première que le produit des axes est constant, et la seconde (après avoir divisé ses deux membres par les racines carrées de ceux de la première) que l'angle des directions asymptotiques est invariable. Mais elles peuvent, en outre, se prêter à de nombreuses interprétations géométriques concernant un système de deux diamètres quelconques; je citerai les deux suivantes.

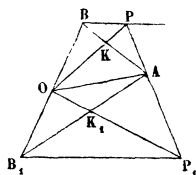
« THÉORÈME I. — Soient deux diamètres réels quelconques OA et OB; menons les tangentes aux extrémités B et B₁ du diamètre OB, lesquelles rencontrent en P et P₁ la tangente en A; soient K et K₁ les inter-

» sections des diamètres OP et OP_1 avec les cordes AB
» et AB_1 : on a

$$(1) \quad \text{surf AOB.} \sqrt{\frac{\text{OP} \cdot \text{OP}_1}{\text{OK} \cdot \text{OK}_1}} = \text{constante} = ab,$$

- » a et b étant les longueurs des demi-axes de la courbe.
- » Si l'un des diamètres est imaginaire, OB par exem-

FIG. 1.



» ple, on mènera en B la tangente à l'hyperbole conju-
» guée, et on aura

(1 bis) $\text{surf AOB} \cdot \sqrt{\frac{\text{OP}}{\text{OK}}} = \text{constante} = ab,$

» a et b étant les demi-axes de la courbe. »

« THÉOREME II. — Soient deux diamètres quelconques
» OA et OB, l'un d'eux au moins étant réel, OA par
» exemple. Menons la tangente en A et joignons le point O
» au milieu I de la corde AB; soient Q le point de ren-
» contre de OI avec la tangente en A, et AA', BB' les
» distances respectives des extrémités A et B aux dia-
» mètres OB et OA; on a

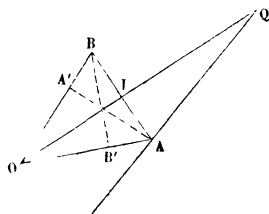
$$(2) \quad \frac{1}{AA'^2} \pm \frac{1}{BB'^2} - \frac{OI - IQ}{OQ} \cdot \frac{\cot \theta}{\text{surf } AOB} = \text{const} = \frac{1}{a^2} \pm \frac{1}{b^2};$$

» θ est l'angle des deux diamètres considérés, a et b sont
 » les axes de la courbe. Le signe — devant les seconds
 » termes de chaque membre correspond au cas où le dia-

» mètre OB est imaginaire. La distance OQ étant considérée comme positive, on devra regarder les segments OI , IQ , $(OI - IQ)$ comme positifs ou négatifs, suivant qu'ils seront dans le sens OQ ou en sens contraire.

» Lorsque les deux diamètres OA et OB sont réels, la

FIG. 2.



» droite QB est tangente à la courbe au point B . Si les deux diamètres OA et OB sont imaginaires, on mène les tangentes à l'hyperbole conjuguée. »

Les deux théorèmes, traduits par les égalités (1), (1 bis) et (2), sont des interprétations géométriques des relations (I) et (II); ils donnent, comme cas particuliers, les propositions connues sur les diamètres conjugués et sur les diamètres rectangulaires.