

PAUL SERRET

Analogies de la géométrie du plan à celle de l'espace

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 4
(1865), p. 433-451

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__433_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1865, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANALOGIES DE LA GÉOMÉTRIE DU PLAN A CELLE DE L'ESPACE

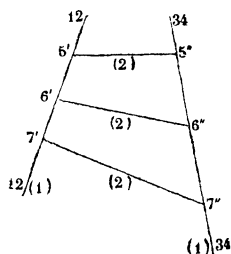
(voir p 145 et 193) ;

PAR M. PAUL SERRET.

IV.

13. Le *plan des centres* de toutes les surfaces du second ordre tangentes à sept plans donnés est susceptible d'une seconde construction et qui rappelle, autant que le permet la diversité des choses, la construction de la *droite des centres* pour les coniques inscrites à un système de quatre droites.

Soient 1, 2, ..., 7 les plans donnés; 12, 23, ... les



droites de rencontre des plans 1 et 2, 2 et 3, Que l'on imagine un hyperboloïde à une nappe H, assujetti à passer par la droite 12, par la droite 34, et à être tangent, en outre, à chacun des plans non encore employés, 5, 6, 7. Assujetti de la sorte à neuf conditions, l'hyperboloïde H est déterminé, et il est aisé de voir que son centre

appartient au plan général des centres de toutes les surfaces du second ordre tangentes aux sept plans donnés. Car l'hyperboloïde H est d'abord explicitement assujéti à être tangent aux plans 5, 6, 7. Passant, en outre, par la droite 12, comme par la droite 34, il se trouve tangent à tous les plans menés par chacune de ces droites ; et, en particulier, aux plans 1, 2, 3 et 4 : il est donc tangent aux sept plans donnés. Son centre, d'ailleurs, peut être construit bien aisément. Regardant, en effet, les droites 12, 34 qui ne sont pas, en général, dans un même plan, comme formant deux génératrices du premier système de l'hyperboloïde H ; chacun des plans tangents 5, 6, 7 renferme une génératrice du second système, rencontrant les génératrices 12, 34 du premier en des points qui peuvent être construits : puisqu'ils ne sont autres que les traces des droites 12 et 34 sur chacun des plans 5, 6, 7. Ces traces donc étant déterminées, et réunies deux à deux par les droites $5'5''$, $6'6''$, $7'7''$; on a dans ces droites trois génératrices d'un même système de l'hyperboloïde H , dont le centre se trouve, dès lors, soit au centre du parallépipède construit sur les trois génératrices ; soit, ce qui vaut mieux pour l'analogie, au point de concours des médianes de deux quelconques des trois quadrilatères gauches $5'5''6''6'$, $6'6''7''7'$, $5'5''7''7'$.

De là cette construction : *Former les trois quadrilatères gauches ayant deux de leurs côtés opposés dans les droites 12, 34, et leurs sommets aux traces de ces droites sur deux quelconques des plans 5, 6, 7 ; menant ensuite les médianes (droites des points milieux des diagonales) de deux de ces quadrilatères, le point de concours de ces médianes est un premier point du plan général des centres.* Le nombre des points que l'on peut obtenir de la sorte, en permutant entre eux les éléments de cette construction, est égal au triple du nombre des combinaisons

de sept lettres prises quatre à quatre, ou trois à trois :

$$3C_{\frac{3}{7}} = 3 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 3 \cdot 35 = 105.$$

Comment déduire de cette construction (*) l'équation

$$\sum_i \lambda P_i^2 = 0$$

du plan général des centres?

V.

14. *Les côtés 1, 2, 3, 4 d'un quadrilatère plan donnant lieu à trois systèmes de sommets opposés et à trois diagonales réunissant les sommets de chaque système : toute conique qui divise harmoniquement deux des diagonales divise harmoniquement la troisième (HESSE).*

Soient, en effet,

$$0 = P_1 = P_2 = P_3 = P_4$$

les côtés du quadrilatère donné ; considérons la courbe

$$(1) \quad \lambda_1 P_1^2 + \lambda_2 P_2^2 + \lambda_3 P_3^2 + \lambda_4 P_4^2 = 0;$$

et la polaire, prise par rapport à cette courbe, d'un point quelconque (p_1, p_2, p_3, p_4)

$$(2) \quad \lambda_1 p_1 \cdot P_1 + \lambda_2 p_2 \cdot P_2 + \lambda_3 p_3 \cdot P_3 + \lambda_4 p_4 \cdot P_4 = 0.$$

Si le point considéré coïncide avec l'un quelconque des sommets du quadrilatère, avec le sommet $(1, 2)$ par exemple, on devra poser

$$0 = p_1 = p_2,$$

et l'équation (2) devenant, par cette substitution,

$$(2') \quad \lambda_3 p_3 \cdot P_3 + \lambda_4 p_4 \cdot P_4 = 0,$$

(*) La définition de la sphère, lieu géométrique des centres des hyperboloïdes équilatères inscrits à un hexaèdre, peut s'obtenir géométriquement par des considérations semblables et sur lesquelles nous reviendrons.

on voit que la polaire, prise par rapport à la courbe (1), de chacun des sommets du quadrilatère, passe par le sommet opposé. Les trois diagonales du quadrilatère donné sont donc divisées harmoniquement par chacune des courbes (1). Et comme l'équation de ces courbes contient trois paramètres arbitraires $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4$ permettant de faire passer l'une d'elles par trois points pris à volonté; on voit qu'une conique, assujettie à diviser harmoniquement chacune des trois diagonales d'un quadrilatère, ne se trouve réellement assujettie qu'à deux conditions : ou, en d'autres termes, que toute conique qui divise harmoniquement les deux premières diagonales divise de même la dernière. Le quadrilatère et la conique sont dits alors *conjugués*.

15. Si l'on dispose des rapports $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4$ de manière que l'équation (1) soit satisfaite par les coordonnées de trois points situés sur une même droite $Q = 0$; la fonction (1) sera décomposable en un produit de deux facteurs linéaires $Q \cdot Q'$; et l'on aura identiquement

$$0 = \lambda_1 P_1^2 + \lambda_2 P_2^2 + \lambda_3 P_3^2 + \lambda_4 P_4^2 \equiv Q \cdot Q'.$$

De là ce théorème connu : *Si l'on prend les traces d'une même droite sur les trois diagonales d'un quadrilatère; les points conjugués harmoniques de chacune de ces traces, par rapport à la diagonale correspondante, sont trois points en ligne droite.*

Dans le cas particulier où la fonction Q se réduit à une constante, l'équation précédente s'abaisse au premier degré et représente la droite des milieux des diagonales du quadrilatère donné.

16. Le lieu des pôles d'une droite donnée $Q = 0$ par rapport à toutes les coniques inscrites au quadrilatère

$o = P_1 = P_2 = P_3 = P_4$ est la droite $Q' = o$ définie par l'identité suivante :

$$\lambda_1 P_1^2 + \lambda_2 P_2^2 + \lambda_3 P_3^2 + \lambda_4 P_4^2 \equiv Q \cdot Q'.$$

17. *Toute surface du second ordre qui divise harmoniquement quatre des dix diagonales d'un hexaèdre complet, divise harmoniquement toutes les autres.*

Soient, en effet,

$$o = P_1 = P_2 = \dots = P_6$$

les plans des faces de l'hexaèdre donné; considérons la surface

$$(1) \quad \lambda_1 P_1^2 + \lambda_2 P_2^2 + \dots + \lambda_6 P_6^2 = 0,$$

et le plan polaire

$$(2) \quad \lambda_1 p_1 P_1 + \lambda_2 p_2 P_2 + \dots + \lambda_6 p_6 P_6 = 0,$$

pris par rapport à cette surface, d'un point quelconque $(p_1, p_2, \dots, p_6)$. Si ce point coïncide avec l'un des sommets de l'hexaèdre, par exemple avec le sommet (123) , on devra poser

$$o = p_1 = p_2 = p_3 :$$

et l'équation (2) devenant, par cette substitution,

$$(2') \quad \lambda_4 p_4 P_4 + \lambda_5 p_5 P_5 + \lambda_6 p_6 P_6 = 0 ;$$

on voit que le plan polaire, pris par rapport à la surface (1), de chacun des sommets de l'hexaèdre, passe par le sommet opposé. Chacune des dix diagonales de l'hexaèdre est donc divisée harmoniquement par la surface. Et comme l'équation (1) de celle-ci renferme cinq rapports arbitraires $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4 : \lambda_5 : \lambda_6$ permettant encore de faire passer la surface par cinq points pris à volonté dans l'espace; on voit qu'une surface du second ordre, assujettie

à diviser harmoniquement chacune des dix diagonales d'un hexaèdre, est seulement assujettie par là à quatre conditions : ou, en d'autres termes, que toute surface de cet ordre qui divise harmoniquement quatre des diagonales d'un hexaèdre divise de même les six autres. L'hexaèdre et la surface sont dits, dans ce cas, *conjugués*.

18. Si l'on dispose des coefficients λ de manière que la fonction (1) se décompose en un produit de deux facteurs linéaires, ou que l'on ait identiquement

$$(3) \quad 0 = \sum_1^6 \lambda P^2 = Q \cdot Q',$$

deux des cinq rapports $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \dots$ resteront arbitraires en permettant, non de prendre à volonté le plan Q , mais de le faire passer par une droite donnée. De là cette conclusion négative : les conjugués harmoniques, par rapport aux dix diagonales d'un hexaèdre, des traces d'un plan quelconque Q sur ces diagonales, ne sont pas, en général, dix points d'un même plan ; si ce n'est dans le cas où le plan Q est tangent à une certaine surface : la surface-enveloppe (ce me semble) du plan d'une conique tangente aux plans des six faces de l'hexaèdre.

19. Si le second facteur Q' de l'une des décompositions (3) se réduit à une constante, le plan représenté par l'équation

$$(3') \quad 0 = \sum_1^6 \lambda P^2 \equiv Q$$

contenant les points milieux des dix diagonales, ces points milieux sont dans un même plan. C'est le cas où la *sphère* représentée par l'équation

$$\sum_1^6 \lambda P^2 = 0$$

se réduit à un plan.

20. Les propositions des n^{os} 14 et 17 ont leurs corrélatives que l'on énoncerait aisément : la première concernant un quadrangle plan et les coniques *conjuguées* ; la seconde, un hexagone gauche et les ellipsoïdes *conjugués*.

VI.

21. LEMME. — Six droites $o = P_1 = P_2 = \dots = P_6$, situées dans le même plan, étant telles que la fonction $\sum_1^6 \lambda P^2$ puisse être rendue identiquement nulle, ou que l'on ait l'identité

$$(1) \quad \sum_1^6 \lambda P^2 \equiv 0 :$$

ces six droites sont tangentes à une même conique.

L'identité (1) imposant six conditions aux cinq rapports arbitraires $\lambda_1 : \lambda_2 : \dots : \lambda_6$, cette identité n'aura lieu qu'en vertu d'une convenable dépendance entre les six droites données. Pour trouver, d'ailleurs, la nature de cette dépendance, considérons la conique tangente aux cinq premières droites 1, 2, 3, 4, 5 ; et le faisceau des diamètres de cette courbe, représenté (voir le § I, n^o 2) par l'équation

$$(2) \quad \sum_1^5 \lambda P^2 = 0$$

rendue linéaire à l'aide des coefficients. Entre l'identité (1) et l'équation (2) nous pouvons éliminer l'un des carrés, P_1^2 par exemple ; et l'équation résultante

$$(2') \quad \sum_2^6 \lambda' P^2 = 0$$

ne cessera pas de représenter le faisceau des diamètres de la conique définie par les tangentes 1, 2, ..., 5. D'ailleurs, comme l'équation équivalente (2), l'équation (2')

est du premier degré en x, y , et représente, dès lors, le faisceau des diamètres de la conique définie par les tangentes 2, 3, 4, 5, 6. Les deux coniques (1, 2, 3, 4, 5) et (2, 3, 4, 5, 6) ont donc les mêmes diamètres, le même centre, quatre tangentes communes. Elles coïncident; et les six droites 1, 2, ..., 5, 6 sont tangentes à une même conique.

Nous reviendrons plus loin sur ce lemme et son corrélatif, susceptibles l'un et l'autre d'une grande extension.

22. *Les côtés de deux triangles isolément conjugués par rapport à une même conique sont six tangentes d'une seconde conique. Réciproquement, etc.*

La conique donnée étant conjuguée à chacun des triangles 123, 456, son équation peut s'écrire indifféremment

$$\sum_1^3 \lambda P^1 = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_4^6 \lambda P^2 = 0,$$

et de ces équations équivalentes résulte l'identité

$$\sum_1^6 \lambda P^2 \equiv 0.$$

Donc, etc.

Par le théorème corrélatif, les six sommets des deux triangles appartiennent à une même conique.

23. LEMME. — *Huit plans* $0 = P_1 = P_2 = \dots = P_8$ *étant tels que la fonction* $\sum_1^8 \lambda P^2$ *soit identiquement nulle, ou que l'on ait l'identité*

$$(1) \quad \sum_1^8 \lambda P^2 \equiv 0:$$

toute surface du second ordre menée tangentiellement à sept de ces plans est d'elle-même tangente au huitième.

Considérons, en effet, l'équation

$$(2) \quad \sum_1^7 \lambda' P^2 = 0,$$

laquelle, rendue linéaire à l'aide des coefficients, représente (voir § II, n° 5) le plan général des centres de toutes les surfaces du second ordre tangentes aux sept premiers plans 1, 2, ..., 7. Si nous éliminons l'un des carrés, P_1^2 , par exemple, entre l'identité (1) et l'équation (2), l'équation résultante

$$(2') \quad \sum_2^8 \lambda'' P^2 = 0$$

représente toujours le lieu des centres des surfaces tangentes aux plans 1, 2, ..., 7. Mais, de même que l'équation équivalente (2), l'équation (2') est du premier degré en x, y, z : elle représente donc aussi le lieu des centres des surfaces tangentes aux plans 2, 3, ..., 7, 8. Les surfaces tangentes aux plans 1, 2, ..., 7, et celles tangentes aux plans 2, 3, ..., 8 ont donc leurs centres dans un même plan ; prises deux à deux, elles sont concentriques, et admettent six plans tangents communs : elles coïncident donc deux à deux ; et chacune d'elles est tangente aux huit plans 1, 2, ..., 7, 8.

24. COROLLAIRE I. — *Deux tétraèdres étant isolément conjugués à une même surface du second ordre, toute surface de cet ordre menée tangentielllement aux plans de sept des huit faces de ces tétraèdres, est d'elle-même tangente au plan de la huitième face.*

(HESSE.)

La surface donnée étant conjuguée à chacun des tétraèdres 1234, 5678, son équation peut s'écrire indiffé-

remment

$$\sum_1^4 \lambda P^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_5^8 \lambda P^2 = 0 :$$

et, comme ces équations sont équivalentes, on a l'identité

$$\sum_1^8 \lambda P^2 \equiv 0.$$

Donc, etc.

Par la proposition corrélatrice, toute surface du second ordre menée par sept des sommets des deux tétraèdres passe d'elle-même par le huitième sommet.

25. COROLLAIRE II. — *Toute surface du second ordre menée tangentielllement à sept plans donnés est d'elle-même tangente à un huitième plan déterminé (LAMÉ) : et ces huit plans sont ceux des faces de deux tétraèdres isolément conjugués par rapport à une autre surface du même ordre.* (HESSE.)

Les plans donnés étant $0 = P_1 = P_2 = \dots = P_7$, considérons la surface indéterminée

$$(1) \quad 0 = \sum_1^4 \lambda P^2 = \lambda_1 P_1^2 + \lambda_2 P_2^2 + \lambda_3 P_3^2 + \lambda_4 P_4^2,$$

et constatons d'abord que l'on peut disposer des rapports arbitraires $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : \lambda_4$ de manière que les plans restants P_5, P_6, P_7 soient polairement conjugués, deux à deux, par rapport à la surface (1). Posons, à cet effet,

$$(5) \quad P_5 = a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3 + a_4 P_4,$$

$$(6) \quad P_6 = b_1 P_1 + \dots + b_4 P_4,$$

$$(7) \quad P_7 = c_1 P_1 + \dots + c_4 P_4;$$

le pôle (p_1, p_2, p_3, p_4) du plan $P_5 = 0$ sera déterminé par l'identification des équations

$$0 = a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3 + a_4 P_4,$$

$$0 = \lambda_1 p_1 P_1 + \lambda_2 p_2 P_2 + \lambda_3 p_3 P_3 + \lambda_4 p_4 P_4,$$

ou par cette suite de proportions $\frac{\lambda_1 p_1}{a_1} = \frac{\lambda_2 p_2}{a_2} = \dots$ que l'on peut écrire

$$(5') \quad p_1 : \frac{a_1}{\lambda_1} = p_2 : \frac{a_2}{\lambda_2} = p_3 : \frac{a_3}{\lambda_3} = p_4 : \frac{a_4}{\lambda_4}.$$

D'ailleurs, le pôle 5' du plan (5) devant appartenir à chacun des plans *conjugués* (6), (7), on devra poser

$$\frac{a_1 b_1}{\lambda_1} + \frac{a_2 b_2}{\lambda_2} + \frac{a_3 b_3}{\lambda_3} + \frac{a_4 b_4}{\lambda_4} = 0,$$

$$\frac{a_1 c_1}{\lambda_1} + \dots + \frac{a_4 c_4}{\lambda_4} = 0.$$

Les plans (5), (6), (7) seront donc conjugués deux à deux par rapport à la surface (1), si l'on détermine les coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, ou leurs inverses $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots$, à l'aide des trois équations linéaires

$$(\lambda) \quad \begin{cases} \frac{a_1 b_1}{\lambda_1} + \frac{a_2 b_2}{\lambda_2} + \frac{a_3 b_3}{\lambda_3} + \frac{a_4 b_4}{\lambda_4} = 0, \\ \frac{b_1 c_1}{\lambda_1} + \dots + \frac{b_4 c_4}{\lambda_4} = 0, \\ \frac{c_1 a_1}{\lambda_1} + \dots + \frac{c_4 a_4}{\lambda_4} = 0: \end{cases}$$

le système des coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ est donc déterminé, ainsi que la surface (1).

Si l'on conçoit maintenant le plan polaire

$$P_5 = 0$$

du point $0 = P_5 = P_6 = P_7$ par rapport à la surface déterminée (1), les deux tétraèdres qui résultent des huit plans

$$0 = P_1 = P_2 = P_3 = P_4, \quad 0 = P_5 = P_6 = P_7 = P_8$$

sont isolément conjugués par rapport à la surface (1). Le corollaire I est donc applicable; et l'on en conclut que toute surface du second ordre menée tangentiellement aux plans $P_1, P_2, \dots, P_7$ est d'elle-même tangente au plan $P_8 = 0$.

THÉORÈME CORRÉLATIF. — *Toute surface du second ordre, menée par sept points donnés, passe d'elle-même par un huitième point déterminé, et ces huit points sont les sommets de deux tétraèdres isolément conjugués par rapport à une autre surface du second ordre.*

(LAMÉ-HESSE.)

Nous donnerons plus loin une construction nouvelle de ce huitième point, et quelques propriétés d'involution de l'hexaèdre et de l'octaèdre, résultant de ces théorèmes.

26. Le lieu des pôles d'un plan donné $Q = 0$ par rapport à toutes les surfaces du second ordre tangentes aux plans $P_1, P_2, \dots, P_7$ est le plan Q' défini par l'identité suivante :

$$\sum_1^7 \lambda P^2 \equiv Q \cdot Q'.$$

27. LEMME. — *Neuf plans $P_1, P_2, \dots, P_9$ étant tels que la fonction $\sum_1^9 \lambda P^2$ soit identiquement nulle, ou que l'on ait l'identité*

$$(1) \quad \sum_1^9 \lambda P^2 \equiv 0 :$$

toute surface du second ordre menée tangentiellement à huit de ces plans est d'elle-même tangente au neuvième.

Corollaire. — *Toute surface du second ordre menée tangentiellement à huit plans quelconques est d'elle-*

même inscrite à une surface développable dont l'arête de rebroussement est une courbe gauche de la quatrième classe. (HESSE.)

28. LEMME. — Dix plans $0 = P_1 = P_2 = \dots = P_{10}$ étant tels que la fonction $\sum_i^{10} \lambda P^2$ puisse être identiquement nulle, ou que l'on ait l'identité

$$(1) \quad \sum_i^{10} \lambda P^2 \equiv 0 :$$

ces dix plans sont tangents à une même surface du second ordre.

Considérons, en effet, la surface du second ordre déterminée par les neuf plans tangents $0 = P_1 = \dots = P_9$; et le système des plans diamétraux de cette surface représenté par l'équation

$$(2) \quad \sum_i^9 \lambda' P^2 = 0$$

réduite au premier degré en x, y, z , à l'aide des coefficients. Éliminant l'un des carrés P_i^2 , entre l'identité (1) et l'équation (2), l'équation résultante

$$(2') \quad \sum_i^{10} \lambda'' P^2 = 0$$

représentera encore les plans diamétraux de la surface (1, 2, ..., 9) définie par les neuf plans tangents $P_1, \dots, P_9$. D'ailleurs, comme l'équation équivalente (2), l'équation (2') est du premier degré en x, y, z , et représente, dès lors, les plans diamétraux de la surface du second ordre (2, 3, ..., 10) définie par les neuf plans tangents $P_2, \dots, P_9, P_{10}$. Les deux surfaces (1, 2, ..., 9) et (2, 3, ..., 10) ont donc les mêmes plans diamétraux, le même centre et huit plans tangents communs : elles coïncident, et les six

plans donnés sont tangents à la surface unique qui résulte de cette coïncidence. La proposition corrélatrice sera établie et généralisée plus loin.

29. Le théorème du n° 24, relatif à deux tétraèdres isolément conjugués, peut être considéré comme faisant, dans l'espace, l'analogue du théorème plan, suivant lequel les six côtés de deux triangles isolément conjugués par rapport à une même conique sont tangents à une seconde conique. L'analogie toutefois est double; et parallèlement à la voie suivie par M. Hesse, il en est une autre qui aura peut-être une plus large issue, mais qui demanderait, pour être parcourue jusqu'au bout, un peu de cette profonde Géométrie, si familière à l'illustre analyste. On y rencontre, dès le début, en même temps que le théorème de Pappus et son corrélatif, transportés aux surfaces du second ordre, certaines propriétés descriptives de dix points ou de dix plans tangents de ces surfaces, qui ne se prêtent pas, il est vrai, aux mêmes usages que les théorèmes de Pascal et de Brianchon, mais qui méritent d'être notées, en attendant mieux.

Voici d'abord cette seconde analogie, susceptible de deux énoncés distincts.

30. *Si deux pentaèdres sont isolément conjugués par rapport à une même surface du second ordre, les plans des faces de ces pentaèdres sont dix plans tangents d'une autre surface du second ordre. Réciproquement, si l'on sépare dix plans tangents d'une telle surface en deux groupes de cinq plans, les plans de chaque groupe déterminent un pentaèdre, et les deux pentaèdres résultants sont isolément conjugués par rapport à une même surface du second ordre.*

Soient, en effet,

$$o = P_1 = P_2 = \dots = P_5 \quad \text{et} \quad o = P_6 = P_7 = \dots = P_{10}$$

les plans des faces des deux pentaèdres donnés, conjugués l'un et l'autre à une même surface du second ordre : c'est-à-dire tels que le plan polaire, pris par rapport à cette surface, de chacun de leurs sommets passe par l'arête opposée. D'après cette définition, il est aisé de voir que l'équation de la surface conjuguée peut s'écrire indifféremment

$$(1) \quad \sum_i^5 \lambda P^2 = 0,$$

ou

$$(2) \quad \sum_i^{10} \lambda P^2 = 0.$$

Et il résulte, de l'équivalence de ces deux équations, l'identité

$$(3) \quad \sum_i^{10} \lambda P^2 \equiv 0,$$

ou, d'après le lemme, l'analogie énoncée.

Quant à la proposition réciproque, elle résulterait dans un ordre inverse, du dédoublement de l'identité (3), actuellement donnée, suivant les deux équations équivalentes (1) et (2).

31. De même, un tétraèdre et un hexaèdre étant isolément conjugués (voir le n° 17) par rapport à une première surface du second ordre : les plans de leurs faces sont dix plans tangents d'une autre surface du second ordre. Réciproquement, Si l'on sépare dix plans tangents d'une surface du second ordre en deux groupes inégaux, le premier composé de six plans, le second de quatre : l'hexaèdre et le tétraèdre résultant des plans de chaque groupe sont isolément conjugués par rapport à une même surface du second ordre.

La surface conjuguée des deux polyèdres est repré-

sentée, en effet, dans la proposition directe, par l'une ou l'autre de ces équations *équivalentes*

$$(1) \quad \sum_1^6 \lambda P^2 = 0,$$

$$(2) \quad \sum_7^{10} \lambda P^2 = 0.$$

Et l'on en déduit l'identité

$$(3) \quad \sum_1^{10} \lambda P^2 \equiv 0.$$

Suivant la proposition réciproque, l'identité (3) est donnée, et les équations (1), (2) sont équivalentes. Les propositions corrélatives se rapportent aux polygones gauches de quatre, cinq, six sommets, polairement conjugués à une surface du second ordre.

On verra un peu plus loin le rôle de ces analogies; et que, si elles ne paraissent pas immédiatement résolubles en une propriété *descriptive* suffisamment simple d'un système de dix points ou de dix plans tangents d'une surface du second ordre, elles fournissent du moins les propriétés métriques qui correspondent au théorème de Pappus et à son corrélatif.

VII.

32. Les théorèmes connus, relatifs aux divisions proportionnelles, ou homographiques, déterminées par toutes les autres tangentes sur deux tangentes fixes d'une parabole, ou d'une conique quelconque, peuvent se déduire des deux identités

$$(1) \quad \sum_1^5 \lambda P^2 \equiv \text{const.},$$

$$(2) \quad \sum_1^6 \lambda P^2 \equiv 0,$$

auxquelles donnent lieu cinq tangentes d'une parabole, six tangentes d'une conique quelconque. Prenant pour axes des x, y deux de ces tangentes, l'identité générale (2) devient

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \sum_1^4 \lambda_i \left(\frac{x}{a_i} + \frac{y}{b_i} - 1 \right)^2 \equiv 0.$$

Développant, égalant à zéro les coefficients des termes en x^2, y^2, xy, x, y, x^0 , et éliminant $\alpha, \beta, \lambda_1, \dots, \lambda_4$, entre les six équations résultantes, on trouve

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 b_1} & \frac{1}{a_2 b_2} & \frac{1}{a_3 b_3} & \frac{1}{a_4 b_4} \\ \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_3} & \frac{1}{a_4} \\ \frac{1}{b_1} & \frac{1}{b_2} & \frac{1}{b_3} & \frac{1}{b_4} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en ordonnant par rapport aux éléments de la première colonne, supprimant les indices 1 et chassant les dénominateurs,

$$(I) \quad k.ab + \alpha.a + \beta.b + \gamma = 0.$$

Telle est la relation entre l'abscisse et l'ordonnée à l'origine d'une tangente quelconque. Il résulte de la forme de cette relation, que les traces a et b d'une tangente variable, sur les deux tangentes fixes ox et oy , déterminent sur ces dernières deux divisions homographiques. On pourrait d'ailleurs écrire *a priori* la relation (I) et, après y avoir mis en évidence les coordonnées $X = -\frac{\beta}{2k}, Y = -\frac{\alpha}{2k}$ du centre de la courbe, en déduire par une autre analyse les résultats obtenus au § I.

33. Opérant de même sur l'identité $\sum_1^n \lambda P^2 \equiv 0$, re-

lative à dix plans tangents d'une surface du second ordre, et prenant encore trois des dix plans tangents pour plans des x, y, z , on aurait d'abord

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \sum_1^7 \lambda_i \left(\frac{x}{a_i} + \frac{y}{b_i} + \frac{z}{c_i} - 1 \right)^2 \equiv 0.$$

Développant ensuite, égalant à zéro les coefficients des termes en $x^2, y^2, z^2, xy, \dots, x, y, z, x^0$, et éliminant les indéterminées $\alpha, \beta, \gamma, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_7$, on obtiendrait la relation

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1 b_1} & \frac{1}{a_2 b_2} & \dots & \frac{1}{a_7 b_7} \\ \frac{1}{b_1 c_1} & \frac{1}{b_2 c_2} & \dots & \frac{1}{b_7 c_7} \\ \frac{1}{c_1 a_1} & \frac{1}{c_2 a_2} & \dots & \frac{1}{c_7 a_7} \\ \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \dots & \frac{1}{a_7} \\ \frac{1}{b_1} & \frac{1}{b_2} & \dots & \frac{1}{b_7} \\ \frac{1}{c_1} & \frac{1}{c_2} & \dots & \frac{1}{c_7} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

De là, en ordonnant par rapport aux éléments de la première colonne, supprimant les indices 1 et chassant les dénominateurs,

$$(II) \quad k \cdot abc + \alpha \cdot bc + \beta \cdot ca + \gamma \cdot ab + \alpha' \cdot a + \beta' \cdot b + \gamma' \cdot c = 0.$$

Telle est la dépendance entre les trois segments a, b, c déterminés par un plan tangent quelconque sur les arêtes x, y, z d'un trièdre circonscrit. On aurait pu écrire, *a priori*, l'équation (II), en remarquant que le nombre des paramètres indéterminés contenus dans la relation cherchée

$\varphi(a, b, c) = 0$ ne pouvant être supérieur à six, le nombre de ses termes ne peut d'abord dépasser *sept*; que, d'ailleurs, cette relation doit être algébrique et du premier degré par rapport à chacune des lettres a, b, c : toutes conditions déjà remplies par la forme (II), et par cette forme seulement. L'équation (II) obtenue de la sorte, on peut y mettre en évidence les coordonnées $\left(X = -\frac{\alpha}{2k}, Y = -\frac{\beta}{2k}, Z = -\frac{\gamma}{2k} \right)$ du centre de la surface, et en déduire une autre analyse des problèmes traités dans le § II.

(*La suite prochainement.*)