Nouvelles annales de mathématiques

Questions

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 428-431

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__428_1>

QUESTIONS.

737. On peut inscrire à un cercle donné une infinité de triangles dont les hauteurs se croisent en un point donné. Trouver, par la Géométrie, la commune enveloppe des côtés de ces triangles. (PAUL SERRET.)

738. Une ellipse et l'un de ses cercles directeurs étant tracés, il existe une infinité de triangles simultanément inscrits au cercle et circonscrits à l'ellipse; le point de rencontre des hauteurs est le même pour tous ces triangles. (PAUL SERRET.)

739. Équation d'une surface du second degré passant par trois droites.

On peut mettre les équations des trois droites données sous la forme suivante :

$$1^{re}\text{ droite}\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l} A = 0;\\ B = 0;\end{array}\right.$$

$$2^{e}\text{ droite}\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l} C = 0;\\ D = 0;\end{array}\right.$$

$$3^{e}\text{ droite}\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l} A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta = 0;\\ A\alpha' + B\beta' + C\gamma' + D\delta' = 0.\end{array}\right.$$

L'équation de la surface du second degré est

$$\frac{A\alpha + B\beta}{C\gamma + D\delta} = \frac{A\alpha' + B\beta'}{C\gamma' + D\delta'}.$$

A, B, C et D désignent des fonctions du premier degré en x, y et z; α, β, γ, δ, α', β', γ', δ' sont des constantes.

(E. Barbier.)

740. Deux cercles étant donnés, on inscrit dans l'un d'eux un quadrilatère dont les côtés coupent la corde commune en quatre points; il est possible d'inscrire dans l'autre cercle une infinité de quadrilatères dont les côtés passent par les mêmes points de la corde commune.

(E. Barbier.)

741. Si l'on coupe un fuseau sphérique donné par une série de grands cercles tournant autour d'un diamètre quelconque, le lieu géométrique des milieux des arcs interceptés dans le fuseau sera un grand cercle qui aura le même diamètre que le fuseau. (Housel.)

742. Le lieu des foyers des paraboles conjugués à un triangle donné est la circonférence des neuf points de ce triangle. (J. Griffiths.)

743. Soient α_1, β_1, γ_1 les points auxquels les côtés d'un triangle ABC sont touchés par le cercle inscrit; par chacun

des sommets A, B, C on mène une droite parallèle à l'axe d'homologie des triangles ABC, $\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1$ et on désigne par x, y, z les points de leur intersection avec les côtés BC, CA, AB, et par p le pied de la perpendiculaire abaissée du centre du cercle inscrit $(\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1)$ sur l'axe d'homologie des triangles ABC, xyz : démontrer que la circonférence des neuf points du triangle ABC touche la circonférence inscrite $(\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1)$ au point p.

(J. Griffiths.)

744. On donne sur un plan une conique et un point fixe; on abaisse de ce point des perpendiculaires sur les trois côtés d'un triangle conjugué à la conique, et par les pieds de ces perpendiculaires on fait passer une circonférence. Pour chaque triangle conjugué à la conique, on décrit ainsi une circonférence : toutes ces circonférences ont le même centre radical. (Mannheim.)

745. D'un point pris dans le plan d'une courbe géométrique on mène toutes les tangentes à cette courbe, on divise le rayon de courbure relatif à chaque point de contact par le cube de la distance de ce point au point fixe d'où émanent les tangentes : la somme de tous les rapports ainsi obtenus est égale à zéro. (Mannheim.)

746. Démontrer la relation

$$m = \left\{ \frac{\sin\dfrac{\pi}{m}\cdot\sin\dfrac{2\pi}{m}\cdot\sin\dfrac{3\pi}{m}\cdots\sin\dfrac{\left(\dfrac{m}{2}-1\right)\pi}{m}}{\sin\dfrac{\pi}{2m}\cdot\sin\dfrac{3\pi}{2m}\cdot\sin\dfrac{5\pi}{2m}\cdots\sin\dfrac{(m-1)\pi}{2m}} \right\}^2,$$

dans laquelle m est un nombre entier pair.

(E. Catalan.)

747. Quelle est l'enveloppe du plan mené perpendiculairement à l'extrémité du diamètre d'un ellipsoïde, lorsque cette extrémité décrit une circonférence?

(E. CATALAN.)

748. Si les nombres entiers a, b, c sont racines de l'équation $x^3 - px + q = 0$, on aura en nombres entiers

$$9q^2 + Aa^2 = r'^2,$$
$$9q^2 + Bb^2 = r''^2,$$
$$9q^2 + Cc^2 = r'''^2,$$

$\frac{A}{4p}$, $\frac{B}{4p}$, $\frac{C}{4p}$ étant racines de l'équation

$$y^3 - 3p^2y + 2p^3 - 27q^2 = 0,$$

et r, r', r'' étant de même racines d'une équation du troisième degré, dont les coefficients sont des fonctions entières et rationnelles des coefficients de la proposée.

Remarque. — Les trois relations ci-dessus étant divisibles respectivement par a^2, b^2, c^2, les carrés $\frac{r'^2}{a^2}$, $\frac{r''^2}{b^2}$, $\frac{r'''^2}{c^2}$ sont encore racines d'une équation cubique qu'on peut construire.

(S. REALIS.)