

LÉON DYRION

**Note sur la section du tore par le
plan bitangent**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 4
(1865), p. 348-353

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__348_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1865, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LA SECTION DU TORE PAR LE PLAN BITANGENT;

PAR M. LÉON DYRION,
Elève de l'École Polytechnique.

J'écris l'équation du cercle dans le plan des xz sous la forme

$$z^2 - x^2 \operatorname{tang}^2 \alpha + (1 + \operatorname{tang}^2 \alpha)(x - d)^2 = 0,$$

α étant l'angle de la tangente ot menée par l'origine au cercle, et d l'abscisse du point t (voir la première figure de la Note suivante). Pour avoir l'équation du tore, je remplace x^2 par $x^2 + y^2$, et j'ai

$$z^2 - x^2 \operatorname{tang}^2 \alpha - y^2 \operatorname{tang}^2 \alpha + (1 + \operatorname{tang}^2 \alpha)(\sqrt{x^2 + y^2} - d)^2 = 0,$$

et si on coupe par le plan $z = x \operatorname{tang} \alpha$, on a pour équation de la projection

$$(d \pm y \sin \alpha)^2 = x^2 + y^2$$

ou

$$d^2 \pm 2dy \sin \alpha = x^2 + y^2 \cos^2 \alpha.$$

Si maintenant on veut la section dans son plan, je remplace x par $x \cos \alpha$, et j'ai

$$d^2 \pm 2dy \sin \alpha = (x^2 + y^2) \cos^2 \alpha.$$

Appelant R la distance oc , r le rayon du cercle, on a immédiatement

$$x^2 (y \pm r)^2 = R^2,$$

résultat connu.

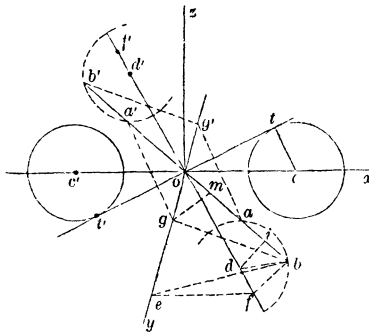
NOTE.

La proposition sur le plan bitangent est due à M. Yvon Villarceau; elle a été démontrée très-simplement au moyen de la Géométrie élémentaire par M. Barbier (voir le recueil scientifique intitulé *les Mondes*, t. III, p. 703). J'indiquerai ici une autre démonstration fondée de même sur les éléments les plus simples de la Géométrie, et conduisant facilement à la proposition relative à la sphère bitangente.

Il résulte de la définition du *tore*, que si le point o est le centre de cette surface et oz son axe, toute section du tore par un plan zox contenant oz est formée de deux circonférences égales, dont les centres c, c' , équidistants du point o , appartiennent à la perpendiculaire élevée en ce point à l'axe oz . Le rayon de ces circonférences et la distance de leurs centres au point o sont invariables; je nommerai r et d ces deux lignes.

Quand le plan zox tourne autour de oz , la tangente tol' commune aux deux circonférences c, c' , décrit

FIG. 1.



un cône de révolution bitangent au tore, les circonférences décrites par les points t, t' sont les deux lignes de contact.

Il est clair qu'un plan tangent à ce cône, suivant une génératrice quelconque tot' , est bitangent au tore aux points t et t' , et que sa trace sur le plan de l'équateur est une droite oy , perpendiculaire au plan toz .

La section du tore par ce plan bitangent toy , se forme de deux circonférences égales, ayant pour centres les points g, g' , situés sur la trace oy , à une distance r du point o , et dont les rayons sont égaux à d : c'est ce que je vais démontrer.

Soit mené par l'axe oz un plan quelconque, ses traces sur les plans xoy, toy seront des droites fof', bob' , et il coupera le tore suivant deux circonférences égales ayant leurs centres d, d' sur fof' . Ces deux circonférences sont rencontrées par la droite bob' en des points b, a, a', b' , dont le lieu géométrique est la section du tore par le plan bitangent.

Du point b je mène bf perpendiculaire à of , puis fe perpendiculaire à oy . Les droites eb, ef étant parallèles à ot, oc , les triangles rectangles bfe, cto ont leurs angles égaux; donc

$$(1) \quad \frac{eb}{bf} = \frac{oc}{ct} = \frac{d}{r}.$$

Sur oy je prends $og = r$, et j'abaisse sur ob les perpendiculaires gm, di . Les triangles rectangles gmo, dio sont respectivement semblables aux triangles beo, bfo ; et de là

$$(2) \quad \frac{eb}{gm} = \frac{bo}{go},$$

$$(3) \quad \frac{bf}{di} = \frac{bo}{do}.$$

Divisant membre à membre l'égalité (2) par l'égalité (3), il vient

$$\frac{eb}{bf} \times \frac{di}{gm} = \frac{do}{go} = \frac{d}{r};$$

mais

$$\frac{eb}{bf} = \frac{d}{r}, \quad \text{donc } gm = dt.$$

D'ailleurs

$$og = r = db;$$

par conséquent, les triangles rectangles gmo , dib sont égaux entre eux, et de leur égalité résulte celle des triangles rectangles gmb , dio ; il s'ensuit

$$gb = od = d.$$

De ce qu'on a

$$om = ib \quad \text{et} \quad oa = oa',$$

il faut conclure que

$$ma' = mb \quad \text{et} \quad ga' = gb = d.$$

Ainsi, le lieu géométrique des points b et a' est une circonférence décrite dans le plan bitangent, du point g comme centre avec d pour rayon.

En prenant sur le prolongement de oy la distance $og' = og$, et menant les droites $g'b'$, $g'a$, on aura

$$g'b' = gb = d \quad \text{et} \quad g'a = ga' = d,$$

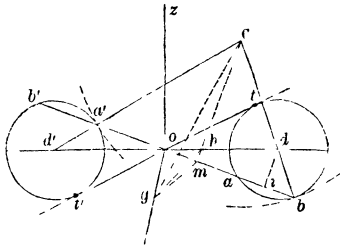
c'est-à-dire que le lieu géométrique des points b' , a , est une seconde circonférence dont g' est le centre, et d le rayon. Donc, la section du tore par le plan bitangent considéré, se forme des deux circonférences g , g' qui se coupent aux points t , t' . La première proposition est ainsi démontrée.

Pour déterminer le centre et le rayon d'une sphère bitangente au tore, il suffit de décrire, dans un plan passant par l'axe de la surface, un cercle qui touche les deux cercles de la section faite par ce plan, l'un intérieurement et l'autre extérieurement. Soient C , d , d' les centres

de ces trois cercles, et b, a' les points de contact : la sphère dont C est le centre et Cb le rayon sera bitangente au tore, aux points b, a' .

La corde des contacts ba' passe par le point o , centre de similitude inverse des circonférences égales d, d' . Par

FIG. 2.



la droite ba' on peut mener deux plans bitangents au tore, parce qu'on peut mener par cette droite deux plans tangents au cône de révolution dont l'axe est oz , et qui a pour génératrice la tangente tot' commune aux deux cercles d, d' . Chacun de ces plans bitangents coupe le tore suivant deux circonférences, et sur l'une d'elles se trouvent les points b, a' (p. 351); il y a donc sur la surface du tore deux circonférences passant chacune par les points b et a' . Ces deux circonférences appartiennent à la sphère bitangente au tore : en cela consiste la proposition à démontrer.

Soient g le centre, et, par conséquent, gba' le plan de l'une des circonférences dont il s'agit, tout se réduit à prouver que la droite Cg est perpendiculaire au plan gba' .

On sait que le point g est situé sur le plan de l'équateur, à une distance r du point o , et que les perpendiculaires gm, di , abaissées des points g et d sur ob , étant égales entre elles, on a

$$om = bi, \quad bm = oi, \quad gb = d \text{ (p. 351).}$$

De plus, Cm est perpendiculaire à ba' , car $Cb = Ca'$. Cette perpendiculaire Cm rencontre dd' en un point h , et le parallélisme des droites hm , di donne

$$\frac{hm}{di} = \frac{om}{oi} = \frac{bi}{bm} = \frac{di}{Cm}.$$

Mais

$$di = gm, \quad \text{donc} \quad \frac{hm}{gm} = \frac{gm}{Cm};$$

par conséquent, les triangles gmh , gmC sont semblables, et les angles ghm , Cgm sont égaux entre eux. Or, l'angle ghm est droit, car gh est perpendiculaire au plan ohm , comme intersection des deux plans ghm , gho , perpendiculaires à ohm ; donc, l'angle Cgm , égal à ghm , est droit. En outre, l'un des côtés gm de l'angle droit Cgm coïncide avec l'intersection des deux plans Cgm , gba' qui sont perpendiculaires entre eux; il s'ensuit que la droite Cg est perpendiculaire au plan gba' . Ce qu'il fallait démontrer.

De là je conclus que toute sphère bitangente au tore coupe la surface du tore suivant deux circonférences dont les rayons sont égaux à d , et qui ont leurs centres sur le plan de l'équateur, à la distance r du centre de la surface.

G.