

S. REALIS

## **Sur une classe d'équations résolues par Moivre et leurs dérivées**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 4  
(1865), p. 209-220

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1865\\_2\\_4\\_209\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4_209_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1865, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

# SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS RÉSOLUES PAR MOIVRE ET LEURS DÉRIVÉES;

PAR M. S. REALIS.

---

1. Soit l'équation

$$(1) \quad y^{2n} + qy^n + p^n = 0,$$

dont les  $2n$  racines sont comprises dans l'expression

$$y = \alpha \sqrt[n]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} - p^n}},$$

où l'on doit donner à  $\alpha$ , successivement, les  $n$  valeurs qui vérifient l'équation binôme

$$\alpha^n - 1 = 0.$$

On supposera constamment, dans ce qui va suivre, que le nombre désigné par  $p$  est positif. Dans cette hypothèse, l'équation (1) demeure la même lorsqu'on y change  $y$  en  $\frac{p}{y}$ ; d'où il suit qu'elle admet  $n$  diviseurs du second degré exprimés par la formule

$$y^2 - xy + p,$$

dans laquelle on attribuera à  $x$  les  $n$  valeurs de la fonction  $y + \frac{p}{y}$ .

D'après cela, divisons l'équation par  $y^n$ , ce qui la met

sous la forme

$$\gamma^n + q + \frac{p^n}{\gamma^n} = 0,$$

et faisons

$$\gamma + \frac{p}{\gamma} = x.$$

On aura

$$\begin{aligned} \gamma^n + \frac{p^n}{\gamma^n} - x^n - np x^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2} p^2 x^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{2 \cdot 3} p^3 x^{n-6} \\ + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{2 \cdot 3 \cdot 4} p^4 x^{n-8} - \dots \mp 2 p^{\frac{n}{2}}, \end{aligned}$$

ou bien

$$\gamma^n + \frac{p^n}{\gamma^n} = x^n - np x^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2} p^2 x^{n-4} - \dots \mp np^{\frac{n-1}{2}} x,$$

selon que  $n$  sera un nombre pair ou impair. Pour abrégier, on représentera par  $P_{2h} p^h x^{n-2h}$  un terme intermédiaire quelconque du développement qu'on vient d'écrire, laissant toutefois en évidence le deuxième terme où  $P_2 = -n$ . La loi de formation des coefficients  $P$  est connue, et je ne m'y arrêterai pas (*voir l'Algèbre supérieure* de M. Serret, 2<sup>e</sup> édit., p. 194 et 441).

Au moyen de ce développement, l'équation (1) divisée par  $\gamma$  sera transformée dans la suivante :

$$(2) \quad x^n - np x^{n-2} + P_1 p^2 x^{n-4} + \dots + P_{2h} p^h x^{n-2h} + \dots + q = 0;$$

et les  $n$  racines de celle-ci seront comprises, d'après la relation entre  $x$  et  $\gamma$ , dans l'expression

$$x = \alpha \sqrt[n]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} - p^n}} + \frac{p}{\alpha \sqrt[n]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} - p^n}}},$$

ou bien dans l'expression équivalente

$$x = \alpha \sqrt[n]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - p^n}} + \alpha^{n-1} \sqrt[n]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - p^n}},$$

$\alpha$  étant racine de l'équation

$$\alpha^n - 1 = 0.$$

Les équations de la forme (2), dont la résolution est réduite par ce qui précède au dernier degré de simplicité, rentrent dans celles que Moivre avait résolues dans les *Transactions philosophiques* pour l'année 1707. Ces équations ont été ensuite traitées par Euler, qui a vérifié à *posteriori* les solutions que Moivre avait données sans démonstration, et les a complétées par l'introduction des racines de l'unité (voir le tome VI des anciens Commentaires de Pétersbourg : *De formis radicum æquationum*; ou bien le *Complément des Éléments d'Algèbre* de Lacroix, 6<sup>e</sup> édit., p. 147).

On reconnaît aisément, d'après les formules ci-dessus, que selon que l'on aura

$$\frac{q^2}{4} - p^n < 0, \quad \text{ou} \quad \frac{q^2}{4} - p^n > 0,$$

l'équation (2) aura toutes ses racines réelles, ou toutes imaginaires (à l'exception de celle qui correspond à  $\alpha = 1$ , quand  $n$  est impair, et de celles qui correspondent à  $\alpha = 1$  et  $\alpha = -1$ , quand  $n$  est pair et  $q$  négatif).

Dans le cas spécial de

$$\frac{q^2}{4} - p^n = 0,$$

l'équation a toutes ses racines réelles et égales deux à deux (avec une distincte, quand  $n$  est impair; et deux ne différant que par le signe, quand  $n$  est pair et  $q$  négatif)

Ce cas mérite une attention particulière, à cause des circonstances qu'il présente, et des conséquences qu'on en déduit relativement aux racines de l'équation et à celles de sa dérivée. C'est ce que je me propose de développer.

*Remarque.* — L'équation

$$y^6 + qy^3 + p^3 = 0,$$

traitée comme il vient d'être dit, conduit sur-le-champ à la résolution et à la discussion complète de l'équation générale du troisième degré

$$x^3 - 3px + q = 0,$$

au moyen de la formule

$$x = \alpha \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - p^3}} + \alpha^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - p^3}},$$

où  $\alpha$  doit recevoir, successivement, les trois valeurs de la racine cubique de l'unité.

Dans le cas particulier où  $\frac{q^2}{4} - p^3 = 0$ , les trois valeurs de  $x$  sont

$$x_1 = (\alpha + \alpha^2) \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} = x_2,$$

$$x_3 = 2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2}},$$

ou bien, mettant le signe négatif hors du radical, et faisant attention que les racines cubiques imaginaires  $\alpha$  et  $\alpha^2$  donnent  $\alpha + \alpha^2 = -1$ ,

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}} = x_2; \quad x_3 = -2 \sqrt[3]{\frac{q}{2}}.$$

On a en effet

$$x^3 - 3x \sqrt[3]{\frac{q^2}{4}} + q = \left(x + 2 \sqrt[3]{\frac{q}{2}}\right) \left(x - \sqrt[3]{\frac{q}{2}}\right)^2,$$

ou, ce qui revient au même,

$$x^3 - 3px + 2p\sqrt{p} = (x + 2\sqrt{p})(x - \sqrt{p})^2,$$

le radical  $\sqrt{p}$  devant être pris avec le signe de  $q$ .

2. Rappelons ici que si  $n$  est un nombre premier et que  $\alpha$  soit une racine imaginaire quelconque de l'équation  $\alpha^n - 1 = 0$ , les  $n$  racines de cette équation sont représentées par

$$\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots, \alpha^{n-1}, \alpha^n,$$

et que si  $n$  est un nombre composé, il existe telle racine  $\alpha$  (et même plusieurs racines) qui jouit également de la propriété de reproduire toutes les autres par ses diverses puissances successives. Les racines ayant cette propriété sont désignées sous le nom de *racines primitives* ou *racines absolues* de l'équation binôme  $\alpha^n - 1 = 0$ . On peut voir, pour ce qui les concerne, la Note XIII de l'ouvrage de Lagrange sur les équations numériques, ou la XIII<sup>e</sup> leçon de l'*Algèbre supérieure* de M. Serret.

Maintenant, reprenons l'équation (2), et considérons séparément les cas du degré impair et du degré pair.

Soit d'abord  $n$  impair, et posons

$$f(x) = x^n - np x^{n-2} + \dots + P_h p^h x^{n-2h} + \dots \mp n p^{\frac{n-1}{2}} x + p.$$

Prenant pour  $\alpha$  une racine absolue quelconque de l'équation  $\alpha^n - 1 = 0$ , les  $n$  racines de  $f(x) = 0$  seront fournies par la formule

$$(3) \quad x_k = \alpha^k \sqrt[n]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - p^n}} + \alpha^{n-k} \sqrt[n]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - p^n}},$$

où l'on donnera à  $k$  les valeurs successives 1, 2, 3, ...,  $n$ .

Le cas qu'il importe d'examiner est celui où  $\frac{q^2}{4} - p^n = 0$ . Alors les valeurs de  $x$  se partagent par groupes de racines doubles, au nombre de  $\frac{n-1}{2}$ , de la manière suivante :

$$\begin{aligned} x_1 &= (\alpha + \alpha^{n-1}) \sqrt[n]{-\frac{q}{2}} = x_{n-1}, \\ x_2 &= (\alpha^2 + \alpha^{n-2}) \sqrt[n]{-\frac{q}{2}} = x_{n-2}, \\ &\dots\dots\dots, \\ x_{\frac{n-1}{2}} &= \left( \alpha^{\frac{n-1}{2}} + \alpha^{\frac{n+1}{2}} \right) \sqrt[n]{-\frac{q}{2}} = x_{\frac{n+1}{2}}, \end{aligned}$$

tandis que la racine isolée, c'est-à-dire celle qui répond à la valeur réelle  $\alpha^n = 1$ , sera

$$x_n = 2 \sqrt[n]{-\frac{q}{2}}.$$

Et comme les couples  $\alpha, \alpha^{n-1}; \alpha^2, \alpha^{n-2}; \dots; \alpha^{\frac{n-1}{2}}, \alpha^{\frac{n+1}{2}}$  se composent tous d'expressions imaginaires conjuguées et réciproques deux à deux et donnant des sommes réelles, les couples des valeurs égales de  $x$  seront réels, comme on l'a annoncé plus haut.

On aura donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \left( x - 2 \sqrt[n]{-\frac{q}{2}} \right) \left( x - \beta_1 \sqrt[n]{-\frac{q}{2}} \right)^2 \\ &\quad \times \left( x - \beta_2 \sqrt[n]{-\frac{q}{2}} \right)^2 \dots \left( x - \beta_{\frac{n-1}{2}} \sqrt[n]{-\frac{q}{2}} \right)^2, \\ &= (x + 2\sqrt{p})(x + \beta_1\sqrt{p})^2(x + \beta_2\sqrt{p})^2 \dots \\ &\quad \times \left( x + \beta_{\frac{n-1}{2}}\sqrt{p} \right)^2, \end{aligned}$$

en ayant soin de prendre  $\sqrt{p}$  avec le signe de  $q$ ;  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{\frac{n-1}{2}}$  désignent les  $\frac{n-1}{2}$  valeurs (toutes réelles) que prend la fonction

$$\beta_k = \alpha^k + \frac{1}{\alpha^k},$$

en y faisant successivement  $k = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}$ , après y avoir mis pour  $\alpha$  une racine absolue quelconque de l'équation

$$\alpha^n - 1 = 0.$$

Ces valeurs de  $\beta$  se déduisent l'une de l'autre au moyen des relations connues

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \beta_1^2 - 2, \\ \beta_3 &= \beta_1^3 - 3\beta_1, \\ &\dots\dots\dots, \\ \beta_k &= \beta_1^k - k\beta_1^{k-2} + \frac{k(k-3)}{2}\beta_1^{k-4} - \dots, \end{aligned}$$

et ne sont autre chose que les différentes racines de l'équation qu'on obtient en posant

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = \beta$$

dans l'équation

$$\frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1} = 0,$$

d'après la méthode ordinaire d'abaissement des équations réciproques. On peut voir, relativement à la formation à l'équation en  $\beta$ , l'*Algèbre supérieure* déjà citée, p. 186 et 197.

Cela posé, considérons la dérivée de  $f(x)$ , et rappé-

lons-nous que l'équation

$$f'(x) = 0$$

doit avoir les racines  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{\frac{n-1}{2}}$  en commun

avec  $f(x) = 0$ . Nous aurons

$$f'(x) = n(x + \beta_1\sqrt{p})(x + \beta_2\sqrt{p}) \dots \left(x + \beta_{\frac{n-1}{2}}\sqrt{p}\right) X,$$

$X$  désignant un polynôme du degré  $\frac{n-1}{2}$  qu'il s'agit de déterminer.

Cette dérivée, dont le degré est  $n-1$ , ne contiendra pas de terme de degré impair par rapport à  $x$ , en sorte que ses racines seront égales deux à deux et de signes contraires. C'est-à-dire que si l'on désigne par  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}$  les racines (toutes réelles) de  $f'(x) = 0$  rangées par ordre de grandeur algébrique croissante, on aura

$$a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots = a_{\frac{n-1}{2}} + a_{\frac{n+1}{2}} = 0.$$

Substituons ces quantités à la place de  $x$  dans  $f'(x)$ , et supposons d'abord que  $q$  soit positif; nous aurons, à cause des racines communes entre  $f(x) = 0$  et  $f'(x) = 0$ ,

$$f(a_2) = f(a_4) = f(a_6) = \dots = f(a_{n-1}) = 0.$$

Si  $q$  était négatif, ce qui ne changerait rien à la dérivée, on aurait

$$f(a_1) = f(a_3) = f(a_5) = \dots = f(a_{n-2}) = 0.$$

Or, il est clair que si  $q$  est positif, on passe au cas de  $q$  négatif en retranchant de  $f(x)$  la quantité  $2q$ , et si  $q$  est

négalif, on passe au cas de  $q$  positif en ajoutant le double de la valeur absolue de  $q$  à  $f(x)$ ; d'où il suit que, pour  $q > 0$ , on aura simultanément

$$\begin{cases} f(a_{2h+1}) = 2q, \\ f(a_{2k}) = 0, \end{cases}$$

et, pour  $q < 0$ , on aura

$$\begin{cases} f(a_{2h+1}) = 0, \\ f(a_{2k}) = 2q. \end{cases}$$

Dans ces formules,  $a_{2h+1}$  désigne une quelconque des racines de rang impair  $a_1, a_3, \dots, a_{n-2}$ , et  $a_{2k}$  une quelconque des racines de rang pair  $a_2, a_4, \dots, a_{n-1}$ . On

peut mettre, au lieu de  $q$ , sa valeur  $2\sqrt{p^n}$ , ou  $2p^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{p}$ , en prenant le radical avec le signe de  $q$ .

Ce qui précède donne le moyen d'évaluer les racines de l'équation  $X = 0$ , c'est-à-dire les racines de  $f'(x) = 0$  qui n'annulent pas  $f(x)$ . Elles ne sont autres, en effet, que les racines communes à  $f(x) = 0$  et à  $f'(x) = 0$ , prises en signes contraires. Cela résulte, soit de ce que l'on a  $a_k + a_{n-k} = 0$ , comme on a vu plus haut, soit de ce que l'on doit avoir  $f(a) = 2q$ ,  $a$  étant racine de  $X = 0$ ; ce qui revient à changer le signe de  $q$  dans  $f(x) = 0$  après avoir écrit  $a$  au lieu de  $x$ , et par conséquent à prendre les racines ci-dessus de  $\frac{f'(x)}{X} = 0$  avec des signes contraires.

Il vient donc

$$X = (x - \beta_1 \sqrt{p})(x - \beta_2 \sqrt{p}) \dots \left(x - \frac{\beta_{n-1}}{2} \sqrt{p}\right),$$

et par conséquent

$$f'(x) = n(x^2 - \beta_1^2 p)(x^2 - \beta_2^2 p) \dots \left(x^2 - \frac{\beta_{n-1}^2}{2} p\right).$$

On a ainsi, dans le cas de

$$\frac{q^2}{4} - p^n = 0,$$

une méthode générale d'abaissement et de décomposition des équations

$$f(x) = 0 \quad \text{et} \quad f'(x) = 0,$$

au moyen de l'équation en  $\beta$  qui donne les sommes des racines réciproques de l'équation binôme du degré  $n$ .

3. Cette décomposition n'a plus lieu pour l'équation

$$f(x) = 0$$

quand on a

$$\frac{q^2}{4} - p^n \geq 0,$$

mais elle a toujours lieu pour la dérivée, car celle-ci demeure invariable quelle que soit la valeur de  $q$ . Mais dans tous les cas ( $n$  étant impair) on a, entre  $f(x)$  et les racines de la dérivée, les relations très-remarquables qui suivent :

$$1^{\circ} \quad \frac{q^2}{4} - p^n > 0, \quad q = + 2\sqrt{p^n} + r^2,$$

$$\begin{cases} f(a_{2h+1}) = + 4\sqrt{p^n} + r^2, \\ f(a_{2k}) = + r^2; \end{cases}$$

$$2^{\circ} \quad \frac{q^2}{4} - p^n < 0, \quad q = + 2\sqrt{p^n} - r^2 > 0,$$

$$\begin{cases} f(a_{2h+1}) = + 4\sqrt{p^n} - r^2, \\ f(a_{2k}) = - r^2; \end{cases}$$

$$3^{\circ} \quad \frac{q^2}{4} - p^n < 0, \quad q = - 2\sqrt{p^n} + r^2 < 0,$$

$$\begin{cases} f(a_{2h+1}) = + r^2, \\ f(a_{2k}) = - 4\sqrt{p^n} + r^2; \end{cases}$$

$$4^{\circ} \quad \frac{q^2}{4} - p^n > 0, \quad q = -2\sqrt{p^n} - r^2,$$

$$\begin{cases} f(a_{2h+1}) = -r^2, \\ f(a_{2k}) = -4\sqrt{p^n} - r^2. \end{cases}$$

On résume ce qui précède en disant que :

Pour

$$q = +2\sqrt{p^n} \pm r^2 > 0,$$

on a

$$\begin{cases} f(a_{2h+1}) = +4\sqrt{p^n} \pm r^2, \\ f(a_{2k}) = \pm r^2; \end{cases}$$

Pour

$$q = -2\sqrt{p^n} \pm r^2 < 0,$$

on a

$$\begin{cases} f(a_{2h+1}) = \pm r^2, \\ f(a_{2k}) = -4\sqrt{p^n} \pm r^2. \end{cases}$$

*Remarque.* — Dans le cas particulier de  $q = 0$ , on aurait

$$\begin{aligned} x_n &= \sqrt{-p} - \sqrt{-p} = 0, \\ x_1 &= (\alpha - \alpha^{n-1}) \sqrt{-p} = -x_{n-1}, \\ x_2 &= (\alpha^2 - \alpha^{n-2}) \sqrt{-p} = -x_{n-2}, \\ &\dots\dots\dots \\ x_{\frac{n-1}{2}} &= \left( \alpha^{\frac{n-1}{2}} - \alpha^{\frac{n+1}{2}} \right) \sqrt{-p} = -x_{\frac{n+1}{2}}, \end{aligned}$$

et

$$f(x) = x(x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2) \dots \left( x^2 - x_{\frac{n-1}{2}}^2 \right);$$

il y aurait donc une racine égale à zéro, tandis que les autres seraient deux à deux égales et de signes contraires;

ce qui doit être d'après la forme de l'équation. Toutes les racines d'ailleurs seraient réelles, puisque,  $p$  étant positif, on aurait nécessairement  $\frac{q^2}{4} - p^n < 0$ ; ce qui résulte aussi de ce que la valeur de la fonction  $\alpha^k - \alpha^{n-k}$  est toujours de la forme  $R\sqrt{-1}$ .

Par la substitution des racines  $a$  dans  $f(x)$ , il vient en ce cas

$$f(a_{2h+1}) = -f(a_{2k}) = + 2\sqrt{p^n}.$$

(*La suite prochainement.*)