

DIEU

Note sur les équations qui contiennent des fonctions linéaires de coordonnées rectilignes

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 4 (1865), p. 165-168

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__165_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1865, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE

sur les équations qui contiennent des fonctions linéaires de coordonnées rectilignes ;

PAR M. DIEU,

Professeur à la Faculté des Sciences de Lyon.

On discute les équations où il n'entre que trois fonctions de la forme $ax + by + cz + d$, comme si ces fonctions étaient de simples coordonnées. Cela peut s'étendre à des équations contenant des fonctions de cette espèce en nombre quelconque.

Soit

$$F(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0$$

l'équation proposée, $X_1, X_2, \dots$ désignant les fonctions linéaires

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1, \quad a_2x + b_2y + c_2z + d_2, \dots$$

1. Supposons d'abord que trois au moins des plans

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \dots,$$

passent par un même point. Si

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0$$

remplissent cette condition, on aura

$$\begin{aligned} X_1 &= \alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3 + \delta, \\ X_2 &= \alpha' X_1 + \beta' X_2 + \gamma' X_3 + \delta', \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

quels que soient α, β, γ , en prenant pour $\alpha, \beta, \dots, \alpha', \beta', \dots$ la solution des équations

$$\begin{aligned} a_1\alpha + a_2\beta + a_3\gamma &= a_4, \\ b_1\alpha + b_2\beta + b_3\gamma &= b_4, \\ c_1\alpha + c_2\beta + c_3\gamma &= c_4, \\ \delta &= d_4 - d_1\alpha - d_2\beta - d_3\gamma, \end{aligned}$$

et celles des systèmes qui se déduisent de celui-ci par le changement de a_4, b_4, c_4, d_4 en a_5, b_5, c_5, d_5 , etc.

Tous ces systèmes sont possibles et à solution unique, car le déterminant des trois premières équations de chacun, dont la quatrième seulement contient $\delta, \delta', \dots$ ou $\delta^{(n-4)}$, est précisément le déterminant des équations

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0,$$

lequel diffère de zéro d'après l'hypothèse faite sur les plans que ces équations représentent.

Il est clair que la substitution à $X_1, \dots, X_n$ de leurs expressions en X_1, X_2, X_3 conduira à une équation ne contenant plus que ces trois fonctions.

II. Supposons à présent que parmi les plans

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \dots,$$

il ne s'en trouve pas trois qui passent par un même point, mais que deux au moins de ces plans ne soient pas parallèles. Si les plans

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0$$

se coupent, un des autres plans sera parallèle à l'un ou

à l'autre, ou bien les coupera tous deux suivant des droites parallèles à leur intersection.

Dans le premier de ces deux cas, c'est-à-dire quand $X_3 = 0$ sera parallèle à $X_1 = 0$, par exemple, on aura évidemment, quels que soient x, y, z ,

$$X_3 = \alpha X_1 + \beta$$

pour de certaines valeurs de α, β .

Lorsque $X_3 = 0$ coupera $X_1 = 0$ et $X_2 = 0$, on aura

$$X_3 = \alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma,$$

quels que soient x, y, z , en prenant pour α, β la solution des équations

$$a_1 \alpha + a_2 \beta = a_3,$$

$$b_1 \alpha + b_2 \beta = b_3,$$

et pour γ la valeur

$$\gamma = d_3 - d_1 \alpha - d_2 \beta,$$

si l'on a

$$a_1 b_2 - b_1 a_2 \neq 0.$$

Dans ce cas, en effet, l'hypothèse sur les plans

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0$$

conduit à

$$\frac{a_1 c_2 - c_1 a_2}{a_1 c_3 - c_1 a_3} = \frac{b_1 c_2 - c_1 b_2}{b_1 c_3 - c_1 b_3},$$

d'où il suit que les valeurs en question de α, β satisfont à la condition d'identité qui reste, savoir :

$$c_1 \alpha + c_2 \beta = c_3.$$

Si l'on a

$$a_1 b_2 - b_1 a_2 = 0,$$

on doit avoir aussi

$$a_1 b_3 - b_1 a_3 = 0,$$

car l'intersection des deux premiers plans étant parallèle au plan xy , il doit en être de même de l'intersection du premier et du troisième; les équations

$$a_1\alpha + a_2\beta = a_3, \quad b_1\alpha + b_2\beta = b_3$$

se réduisent donc à une seule. Mais alors on a

$$a_1c_2 - c_1a_2 \geq 0,$$

car sans cela les plans

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0$$

seraient parallèles; α et β seront donc déterminés par les équations

$$a_1\alpha + a_2\beta = a_3,$$

$$c_1\alpha + c_2\beta = c_3.$$

Les mêmes raisonnements s'appliquent à $X_4, X_5, \dots$; ainsi l'équation proposée se ramènera à une autre ne contenant que X_1, X_2 .

Enfin, on voit que si tous les plans

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \dots,$$

étaient parallèles entre eux, on aurait

$$X_2 = \alpha X_1 + \beta, \quad X_3 = \alpha' X_1 + \beta', \dots,$$

en sorte qu'on arriverait à une équation ne contenant que X_1 .