Théorème sur l'hexagone

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 129-130

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__129_0>

THÉORÈME SUR L'HEXAGONE.

Quand un hexagone est inscrit dans un cercle, le produit des diagonales qui joignent les sommets opposés est égal à la somme des produits de chacune de ces diagonales par les deux côtés qui n'ont avec elle aucune extrémité commune, plus le produit des côtés de rang pair, plus le produit des côtés de rang impair.

Démonstration. — Soit ABCDEF l'hexagone en question. Je construis le triangle ACE. Appliquant le théorème de Ptolémée à chacun des quadrilatères qu'on peut former avec deux côtés de ce triangle et deux côtés de l'hexagone, j'ai les équations

$$\begin{aligned} -\mathrm{AD}.\mathrm{EC}+\mathrm{DE}.\mathrm{AC}+\mathrm{CD}.\mathrm{AE}&=0,\\ \mathrm{AB}.\mathrm{EC}-\mathrm{BE}.\mathrm{AC}+\mathrm{BC}.\mathrm{AE}&=0,\\ \mathrm{AF}.\mathrm{EC}+\mathrm{EF}.\mathrm{AC}-\mathrm{CF}.\mathrm{AE}&=0.\end{aligned}$$

Ces équations étant homogènes relativement à EC, AC, AE, il en résulte

$$\begin{vmatrix} -\mathrm{AD} & \mathrm{DE} & \mathrm{CD}\\ \mathrm{AB} & -\mathrm{BE} & \mathrm{BC}\\ \mathrm{AF} & \mathrm{EF} & -\mathrm{CF}\end{vmatrix}=0,$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathrm{AD}.\mathrm{BE}.\mathrm{CF}=\mathrm{AD}.\mathrm{BC}.\mathrm{EF}+\mathrm{BE}.\mathrm{AF}.\mathrm{CD}+\mathrm{CF}.\mathrm{AB}.\mathrm{DE}\\ +\mathrm{AB}.\mathrm{CD}.\mathrm{EF}+\mathrm{BC}.\mathrm{DE}.\mathrm{FA}.\end{aligned}$$

Note. — Ce théorème fait l'objet de la question 431, résolue t. XVII, p. 263. La démonstration précédente semble préférable à celle qu'on lit à l'endroit cité, parce qu'elle n'exige que trois équations au lieu de quatre et qu'elle donne la relation sous forme de déterminant, ce qui est très-précieux, comme chacun sait.

On déduit de ce théorème une relation analogue à la précédente, entre les aires des triangles ayant un sommet commun et pour bases les côtés et les grandes diagonales d'un hexagone plan quelconque. J'ai donné cette relation t. XV, p. 378.

P.