

FAA DE BRUNO

Démonstration élémentaire du théorème fondamental sur les lignes géodésiques

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 4
(1865), p. 108-109

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__108_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1865, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

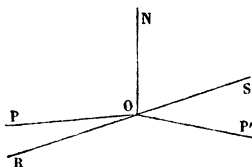
NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DU THÉORÈME FONDAMENTAL SUR LES LIGNES GÉODÉSIQUES;

PAR M. FAA DE BRUNO.

THÉORÈME I. — Soient P, P' deux points situés sur



deux plans se coupant le long de la ligne RS. La ligne la plus courte entre ces deux points, en passant par l'intersection RS, sera la ligne POP', qui fait des angles égaux $\text{POR} = \text{SOP}'$ avec la droite RS. Ceci est connu.

THÉORÈME II. — Soit ON l'intersection du plan POP' avec le plan normal en O à la droite RS; la droite ON fera des angles égaux avec OP et OP', c'est-à-dire avec les portions du chemin le plus court.

Considérons en effet les deux trièdres OSNP' et ORPN. Ils ont deux faces égales

$$\begin{aligned}\text{NOS} &= \text{NOR} = 90 \text{ degrés,} \\ \text{RPO} &= \text{POS, d'après le théorème I;}\end{aligned}$$

ensuite les angles dièdres formés sur l'arête commune ON par les plans PNP', RNS sont pareillement égaux. Donc ces trièdres seront égaux, et l'on aura

$$\text{PON} = \text{NOP'}.$$

C. Q. F. D.

Remarque. — Quand les deux plans RSP , RSP' sont infiniment rapprochés, c'est-à-dire juxtaposés, la proposition se confond avec celle très-connue des rayons incidents et réfléchis.

Supposons maintenant que les points P , P' soient situés sur une surface, et que les plans proposés lui soient tangents. Quand ces points seront infiniment rapprochés, la droite RS deviendra tangente à la surface en O , et les deux éléments PO , $P'O$ se confondront avec la tangente en O à la surface suivant le plan POP' . Alors la droite ON , devant être perpendiculaire à la tangente RS par construction, et à la tangente POP' (car d'après le théorème II elle ne doit cesser, même à la limite, de faire des angles égaux avec les deux éléments de la tangente), sera normale à la surface en O . Donc le plan osculateur d'une ligne géodésique sur une surface est normal à la surface.