

NOBLOT

QUANTIN

Question 636

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 97-100

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__97_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTION 636;

SOLUTION DE MM. NOBLOT ET QUANTIN,

Élèves du lycée impérial de Lyon.

ÉNONCÉ. — On suppose que des rayons lumineux perpendiculaires à l'axe d'une parabole soient, à leur rencontre avec cette courbe, réfléchis en faisant un angle de réflexion égal à l'angle d'incidence : trouver l'enveloppe des rayons réfléchis, et déterminer géométriquement le point de contact d'un rayon réfléchi et de l'enveloppe.

Il est à remarquer que la direction du rayon réfléchi est perpendiculaire à la droite qui joint le foyer F de la parabole au point où le rayon lumineux rencontre cette courbe.

Prenons l'équation de la parabole en coordonnées polaires :

$$\rho = \frac{P}{1 - \cos \omega}.$$

Soient ρ_1, ω_1 les coordonnées du point où le rayon incident rencontre la parabole, l'équation du rayon réfléchi est

$$\rho = \frac{\rho_1}{\cos(\omega_1 - \omega)}, \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{P}{(1 - \cos \omega_1) \cos(\omega_1 - \omega)}.$$

Éliminons ω_1 entre cette dernière équation et sa dérivée par rapport à ω_1 . On a :

$$(1) \quad \rho (1 - \cos \omega_1) \cos(\omega_1 - \omega) = P,$$

$$(2) \quad \cos(\omega_1 - \omega) \sin \omega_1 - (1 - \cos \omega_1) \sin(\omega_1 - \omega) = 0.$$

De l'équation (2) on tire

$$(3) \quad \tan(\omega_1 - \omega) = \frac{\sin \omega_1}{1 - \cos \omega_1} = \cot \frac{\omega_1}{2}.$$

(98)

En éliminant $\cos(\omega_1 - \omega)$ entre (1) et (3) on trouve

$$\sin \frac{\omega_1}{2} = \sqrt[3]{\frac{p}{2 \cdot \rho}} = \alpha.$$

Il en résulte

$$\operatorname{tang} \omega_1 = \frac{2\alpha \sqrt{1 - \alpha^2}}{1 - 2\alpha^2}.$$

De l'équation (3) tirons $\operatorname{tang} \omega_1$, et égalons les deux valeurs de $\operatorname{tang} \omega_1$:

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} \omega_1 - \operatorname{tang} \omega &= (1 + \operatorname{tang} \omega \cdot \operatorname{tang} \omega_1) \cot \frac{\omega_1}{2} \\ &= (1 + \operatorname{tang} \omega \cdot \operatorname{tang} \omega_1) \sqrt{\frac{1 - \alpha^2}{\alpha}}; \end{aligned}$$

d'où

$$\operatorname{tang} \omega_1 = \frac{\alpha \operatorname{tang} \omega + \sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha - \operatorname{tang} \omega \cdot \sqrt{1 - \alpha^2}}.$$

En égalant, il vient :

$$\begin{aligned} \alpha(3 - 4\alpha^2) \operatorname{tang} \omega &= (4\alpha^2 - 1) \sqrt{1 - \alpha^2}; \\ \alpha^2(3 - 4\alpha^2)^2(1 + \operatorname{tang}^2 \omega) &= 1; \end{aligned}$$

et finalement :

$$\cos \omega = \alpha(3 - 4\alpha^2).$$

Remplaçons α par sa valeur, et nous aurons, pour l'équation demandée, en coordonnées polaires :

$$\cos \omega = 3 \sqrt[3]{\frac{p}{2 \cdot \rho}} - 2 \cdot \frac{p}{\rho}.$$

Nous pouvons transformer en coordonnées rectilignes, mais remarquons d'abord que si l'on veut discuter l'équation obtenue en coordonnées polaires, on fera bien de la

mettre sous la forme

$$\sin \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\omega}{3} \right) = \sqrt[3]{\frac{p}{2 \cdot \rho}},$$

ou

$$\rho = \frac{p}{2 \cdot \sin^3 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\omega}{3} \right)},$$

qu'on déduit de la précédente en remarquant que

$$\cos \omega = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \omega \right) = 3 \sin \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\omega}{3} \right) - 4 \sin^3 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\omega}{3} \right).$$

En posant

$$\cos \omega = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

on a

$$2(x + 2p)^3 = 27 \cdot p(x^2 + y^2).$$

Détermination directe du point de contact du rayon réfléchi et de son enveloppe.

Quand des rayons lumineux émanent d'un point A, le point de contact X du rayon réfléchi MX, avec la *caustique*, son enveloppe, est à une distance de M donnée par la formule

$$\lim MX = \frac{AM \cdot R \cdot \cos \alpha}{2AM - R \cos \alpha} \quad (*),$$

R étant le rayon de courbure en M.

Dans le cas qui nous occupe, AM est *infini*, et la for-

(*) Cette formule est démontrée dans les *Éléments de Calcul infinitésimal* de M. Duhamel (t. 1^{er}, p. 205, édition de 1856); α est l'angle que le rayon incident forme avec la normale à la courbe au point M où ce rayon rencontre la courbe. G.

(100)

milieu devient

$$\lim \mathbf{MX} = \frac{\mathbf{R} \cos \alpha}{2}.$$

La courbe étant une parabole

$$\mathbf{R} = \frac{(p + 2x)}{p} \sqrt{p^2 + y^2},$$

en prenant pour origine le sommet de la courbe.

La sous-normale est constante et égale à p ; on a donc

$$\cos \alpha = \frac{y}{\sqrt{p^2 + y^2}}.$$

Par suite,

$$\lim \mathbf{MX} = \frac{y (p + 2x)}{2p} (*).$$