

PAUL SERRET

Sur une question de maximum

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 79-81

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__79_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UNE QUESTION DE MAXIMUM;

PAR M. PAUL SERRET.

1. Soient $ABCD$ un tétraèdre quelconque; $A'B'C'D'$ un quadrilatère gauche *fermé* dont les arêtes successives

soient perpendiculaires, respectivement, aux plans des faces du premier tétraèdre, et proportionnelles aux aires de ces faces ; et $A'B'C'D'$ le tétraèdre de même nom et des mêmes sommets :

1° « Les volumes V , V' des deux tétraèdres *orthogonaux* $ABCD$, $A'B'C'D'$ sont liés par la relation

$$V' = \frac{3}{4} V^2.$$

2° « Les trois angles formés par les arêtes opposées du tétraèdre primitif $ABCD$ servent de mesure aux trois *dièdres diagonaux* du quadrilatère orthogonal $A'B'C'D'$. » Le troisième de ces dièdres, qui a seul besoin d'une définition, ayant chacune de ses faces parallèle à deux arêtes opposées du quadrilatère $A'B'C'D'$, et son arête parallèle à la droite des milieux des diagonales.

Corollaire. — « Si deux des dièdres diagonaux du quadrilatère orthogonal sont *droits*, quatre arêtes, opposées deux à deux, du tétraèdre primitif, sont perpendiculaires entre elles. Et il en est de même des deux dernières arêtes. » Cette dernière conclusion résultant soit, au point de vue géométrique, de la collinéation des trois hauteurs dans un triangle sphérique; soit, au point de vue analytique, de cette formule

$$a \cdot a' \cdot \cos(a, a') + b \cdot b' \cdot \cos(b, b') + c \cdot c' \cdot \cos(c, c') = 0,$$

où a et a' , b et b' , c et c' désignent les arêtes opposées du tétraèdre.

Remarque. — La relation

$$V' = \frac{3}{4} V^2,$$

que M. Painvin trouve à l'aide des déterminants (*Nouvelles Annales*, 1862), s'obtient, bien entendu, et de

la manière la plus rapide, par de simples considérations de géométrie. Je l'avais rencontrée moi-même depuis longtemps, et l'avais appliquée au problème de Lagrange.

La solution suivante est extraite d'un Mémoire que j'ai eu l'honneur de soumettre à M. Liouville vers la fin d'octobre 1862, et qui a été inséré dans le numéro de novembre du *Journal de Mathématiques*.

2. PROBLÈME. — *Les aires des quatre faces étant données, définir le tétraèdre maximum.* (Lagrange, *Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1773, p. 160.)

Solution. — Soient ABCD le tétraèdre cherché, et A'B'C'D' son tétraèdre orthogonal. Les aires des faces du premier tétraèdre étant données, et son volume étant maximum : les quatre arêtes consécutives A'B', B'C', C'D', D'A' du second tétraèdre sont données de longueur, et son volume doit être maximum. Or cette condition exige que les dièdres diagonaux du quadrilatère orthogonal A'B'C'D' soient droits. En effet, si le dièdre A'C', par exemple, n'était droit, on pourrait, en laissant immobile la face A'B'C' dans son plan, amener le plan de la face A'D'C' à être perpendiculaire au plan de la première par une rotation effectuée autour de la diagonale A'C'. Par là, la base A'B'C' du tétraèdre orthogonal ne changerait point, mais sa hauteur et, dès lors, son volume augmenteraient. Donc les dièdres diagonaux du quadrilatère orthogonal sont droits, et les arêtes opposées du tétraèdre primitif sont perpendiculaires entre elles : conclusion comprise dans les équations obtenues par Lagrange,

$$a^2 - b'^2 - c'^2 = b^2 - c'^2 - a'^2 = c^2 - a'^2 - b'^2,$$

et énoncée déjà, avec toutes ses conséquences, par M. Painvin.