

AUDOYNAUD

Question d'analyse proposée au concours de l'agrégation (1862)

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 63-67

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2_63_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTION D'ANALYSE
PROPOSÉE AU CONCOURS DE L'AGRÉGATION (1862);

SOLUTION DE M. AUDOYNAUD,
Professeur au lycée de Poitiers.

*Trouver la ligne qui coupe sous un angle constant
tous les méridiens d'une sphère. — Rectifier la courbe.
— Trouver sa projection orthographique et sa projec-
tion stéréographique.*

1. Le méridien PA (*) a pour équations

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad y = mx.$$

Alors, si x', y', z' sont les coordonnées d'un point quelconque M du lieu, la tangente en M au méridien sera représentée par

$$\begin{aligned} x - x' &= -\frac{z'}{(1 + m^2)} (z - z'), \\ y - y' &= -\frac{m^2 z'}{(1 + m^2) y'} (z - z'). \end{aligned}$$

Donc en appelant α le cosinus de l'angle constant, on aura, en supprimant les accents,

$$\frac{-\frac{dx}{dz} \frac{z}{(1 + m^2)x} - \frac{dy}{dz} \frac{m^2 x}{(1 + m^2)y} + 1}{\sqrt{\frac{dx^2}{dz^2} + \frac{dy^2}{dz^2} + 1} \sqrt{\frac{z^2}{(1 + m^2)^2 x^2} + \frac{m^4 z^2}{(1 + m^2)} + 1}} = \alpha.$$

En remplaçant m par $\frac{y}{x}$ et faisant usage de l'équation de la sphère et de son équation différentielle

$$x dx + y dy + z dz = 0,$$

il vient

$$(1) \quad ds = \frac{R}{\alpha} \frac{dz}{\sqrt{R^2 - z^2}},$$

qui, jointe à l'équation de la sphère, donne la *loxodro-*

(*) On est prié de faire la figure. POP' est le diamètre commun aux méridiens considérés; PMA un méridien rencontrant au point A l'équateur EAE'. La droite MI est perpendiculaire sur le rayon OA au point i. La droite MP' rencontre OA au point k.

mie. En l'intégrant, on obtient

$$s = \frac{R}{a} \arcsin \frac{z}{R} + C.$$

On voit que la courbe est rectifiable (*).

Si l'on compte les arcs à partir de $z = z_0$, on aura

$$s = \frac{R}{a} \left(\arcsin \frac{z}{R} - \arcsin \frac{z_0}{R} \right).$$

Remarque. — Si l'angle constant est de 90° , $a = 0$, alors $z = z_0$. Donc la courbe cherchée est l'intersection de la sphère par un plan parallèle au plan des xy , c'est-à-dire un *parallèle*, si ce dernier est l'équateur.

2. Cherchons maintenant l'équation de la courbe en coordonnées polaires.

Posons

$$\text{angle } MOI = \theta, \quad \text{angle } IOE = \varphi.$$

Alors

$$z = R \sin \theta, \quad ds^2 = R^2 (\cos^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2),$$

et l'équation (1) devient

$$d\varphi = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \frac{d\theta}{\cos \theta}.$$

D'où, en intégrant

$$\varphi = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} L \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) + \text{constante},$$

ou

$$(2) \quad \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) = C e^{\frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \varphi} = C e^{\varphi \cot \alpha},$$

en appelant α l'angle donné.

(*) C'est-à-dire que sa rectification se ramène à celle d'un arc de cercle.

Cette équation, considérée simultanément avec celle de la sphère, donne une spirale sphérique.

3. Projection orthographique sur l'équateur.

Posons

$$OI = r,$$

on aura

$$r = R \cos \theta.$$

Mais en désignant par M la quantité $C e^{\varphi \cot \alpha}$, on a

$$\tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) = \frac{1 - \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan \frac{\theta}{2}} = M,$$

d'où

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{1 - M}{1 + M},$$

et par suite

$$\begin{aligned} \sin \frac{\theta}{2} &= \frac{1 - M}{\sqrt{2(1 + M^2)}}, & \cos \frac{\theta}{2} &= \frac{1 + M}{\sqrt{2(1 + M^2)}}, \\ \sin \theta &= \frac{1 - M^2}{1 + M^2}, & \cos \theta &= \frac{2M}{1 + M^2}; \end{aligned}$$

donc

$$(3) \quad r = 2R \frac{M}{1 + M^2} = 2R \frac{C e^{\varphi \cot \alpha}}{1 + C^2 e^{2\varphi \cot \alpha}}.$$

4. Projection stéréographique.

Menons la droite MP' qui rencontre Oi en k , et posons

$$Ok = r'.$$

On aura

$$r' = R \tan OP' M = R \tan \frac{1}{2} POM = R \tan \left(\frac{\frac{\pi}{2} - \theta}{2} \right) = R.M,$$

d'où

$$(4) \quad r' = C.R e^{\varphi \cot \alpha}.$$

C'est une spirale logarithmique

Remarque. — En appelant μ l'angle que le rayon r' fait avec la tangente à la courbe (4), on trouve

$$\operatorname{tang} \mu = \frac{1}{\cot \alpha} = \operatorname{tang} \alpha, \quad \mu = \alpha.$$

C'est ce qu'on pouvait prévoir, puisqu'on démontre que l'angle de deux courbes tracées sur la sphère est égal à celui de leurs projections stéréographiques; or le méridien et la loxodromie font un angle α , donc leurs projections stéréographiques, c'est-à-dire r' et la tangente à la courbe (4), doivent faire le même angle.

§. Si l'on veut les équations de la loxodromie en coordonnées rectilignes, on remarque que de $\sin \theta = \frac{1 - M^2}{1 + M^2}$,

on déduit $M = \sqrt{\frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta}}$; mais $z = R \sin \theta$, donc

$$M = \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) = \frac{R - z}{\sqrt{R^2 - z^2}}.$$

D'ailleurs

$$\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{y}{x};$$

alors, en substituant dans l'équation (2), on obtient

$$(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \left(C e^{\cot \alpha \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{y}{x}} + \frac{1}{C} e^{-\cot \alpha \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{y}{x}} \right) = 2R,$$

équation qui jointe à $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ détermine la courbe demandée.

