

P.-G. DE SAINT-MICHEL

Solution de la question 671

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 540-543

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__540_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 671 ;

PAR M. P.-G. DE SAINT-MICHEL,

Élève de M. Beynac.

Si par un point P , pris sur une conique, on mène deux droites également inclinées sur la normale en ce point, et si l'on joint les points de rencontre de ces droites avec la courbe, 1° toutes les cordes ainsi obtenues passent par un point fixe; 2° trouver le lieu de ce point, quand le point P se meut sur la conique.

1° Soient PA , PB deux droites également inclinées sur la normale PN ; C , D les points de rencontre de la corde AB avec la tangente PC et la normale PD . Les droites PD , PC , bissectrices des angles en P , divisent la corde harmoniquement; donc PN est la polaire du point C ,

et par suite C est un point fixe, pôle de la normale donnée PN.

2° Le point C est le lieu des pôles des normales à la courbe. Pour en trouver l'équation, soit

$$y^2 = 2px + qx^2$$

l'équation générale des coniques; la condition pour qu'une droite $y = mx + n$ soit normale est

$$(1) \quad n = \frac{pm}{q} \left[1 \pm (q+1) \sqrt{\frac{1}{1-m^2q}} \right]:$$

or, l'équation de la tangente au point (x, y) et menée du point C (X, Y) est

$$Yy = pX + qXx + px;$$

en y regardant x et y comme des coordonnées variables, elle représente la polaire du point (X, Y) et peut s'écrire

$$y = \frac{p+qX}{Y} x + p \frac{X}{Y}.$$

Pour exprimer que cette polaire est normale à la courbe, remplaçons dans l'équation (1) m et n par leurs valeurs: on a pour l'équation du lieu

$$p^2 = \frac{(q+1)Y^2(p+qX)^2}{Y^2 - q(p+qX)^2}.$$

En prenant la droite $p+qX=0$ pour nouvel axe des Y, et mettant x et y à la place de X et de Y, l'équation générale du lieu est

$$p^2y^2 - p^2q^2x^2 = (q+1)^2q^2y^2x^2.$$

Ellipse. — L'équation peut se mettre sous la forme

$$a^6y^2 + b^6x^2 = c^4x^2y^2.$$

C'est une courbe concentrique à l'ellipse, ayant avec elle

les mêmes axes de symétrie ; l'origine est un point isolé ; elle a pour asymptotes les couples de droites représentées par les équations $x = \pm \frac{a^3}{c^2}$, $y = \pm \frac{b^3}{c^2}$; elle est intérieure aux asymptotes.

Hyperbole. — Changeant b^2 en $-b^2$, on a

$$a^6 y^2 - b^6 x^2 = c^4 x^2 y^2,$$

courbe concentrique avec l'hyperbole, ayant les mêmes axes de symétrie. L'origine est un point quadruple et en même temps un point d'inflexion : les tangentes en ce point ont pour équation

$$y = \pm \frac{b^3}{a^3} x;$$

la courbe est comprise entre les deux asymptotes

$$x = \pm \frac{a^3}{c^2}.$$

Parabole. — $q = 0$. Si l'on fait $q = 0$ dans l'équation (1), l'une des valeurs de n devient infinie, l'autre se présente sous la forme $\frac{0}{0}$; faisant disparaître l'indétermination, on a

$$n = - \frac{mp(2 + m^2)}{2}.$$

Remplaçant m par $\frac{px}{y}$, n par $\frac{p}{y}$, on trouve pour l'équation du lieu

$$y^2 = - \frac{p^3}{2(p + x)},$$

courbe symétrique par rapport à l'axe de la parabole, ayant cet axe pour asymptote, ainsi que $y = -p$, et tout entière à gauche de cette asymptote.

Note.—La même question a été résolue par MM. Mirza-Nizam, élève du lycée Saint-Louis; Muzeau, lieutenant d'artillerie; Desgranges; Schnée, Tivollier et Grassat, E. P. et A. T., Picquet, Grouard, Léon Dyrion et Pétrencino, élèves; Dupain et E. M., professeurs. Ce dernier démontre que, si par un point A d'un ellipsoïde donné on décrit un cône de révolution dont l'axe soit la normale, le plan de la courbe d'intersection de ce cône avec l'ellipsoïde passe par une droite dont la position est indépendante de l'angle d'ouverture du cône. M. Dupain observe que la première partie de la question a été résolue par M. Poncelet (*Propriétés projectives*, § 484) et par Frégier (*Gergonne*, VI, 229 et 321). P.
