

J. DE VIRIEU

Solution de la question 653

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 457-459

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__457_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 653;

PAR M. J. DE VIRIEU,

Professeur à Lyon (institution Sainte-Barbe).

1. Démontrer l'identité

$$(A) \left\{ \begin{array}{l} (+\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c)^2 - 4 \sin^2(a + b + c) \\ \times (\cos^2 a \cos^2 b + \cos^2 b \cos^2 c + \cos^2 c \cos^2 a) \\ - 4 \cos a \cos b \cos c \cos(a + b + c) \\ \times [\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + \cos^2(a + b + c)] \\ - 2 \cos^2(a + b + c)(\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c) \\ + 4 \cos^2 a \cos^2 b \cos^2 c \\ + 8 \cos a \cos b \cos c \cos(a + b + c) \\ + \cos^4(a + b + c) \end{array} \right\} = 0.$$

(STREBOR.)

2. Rappelons les identités connues

$$(B) \left\{ \begin{array}{l} \cos(p+q) + \cos(p-q) = 2 \cos p \cos q, \\ \cos(p+q) \cos(p-q) = \cos^2 p + \cos^2 q - 1, \\ \cos^2(p+q) + \cos^2(p-q) = 4 \cos^2 p \cos^2 q - 2 \cos^2 q \\ \quad - 2 \cos^2 p + 2. \end{array} \right.$$

3. On a identiquement

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} [x - \cos(+a+b+c)][x - \cos(-a+b+c)] \\ = x^2 - 2 \cos a \cos(b+c)x + [\cos^2(b+c) + \cos^2 a - 1], \end{array} \right.$$

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} [x - \cos(+a-b+c)][x - \cos(+a+b-c)] \\ = x^2 - 2 \cos a \cos(b-c)x + [\cos^2(b-c) + \cos^2 a - 1]. \end{array} \right.$$

4. Multipliant (1) et (2) membre à membre, on a la nouvelle identité

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} [x - \cos(+a+b+c)][x - \cos(-a+b+c)] \\ \times [x - \cos(+a-b+c)][x - \cos(+a+b-c)] \\ \quad x^4 - 2 \cos a [\cos(b+c) + \cos(b-c)] x^3 \\ \quad + \left[4 \cos^2 a \cos(b+c) \cos(b-c) - 2 \right. \\ \quad \left. + 2 \cos^2 a + \cos^2(b+c) + \cos^2(b-c) \right] x^2 \\ = \left\{ \begin{array}{l} - 2 \cos a [\cos(b+c) + \cos(b-c)] \\ \times [\cos(b+c) \cos(b-c) + \cos^2 a - 1] x \\ + \cos(+a+b+c) \cos(-a+b+c) \\ \times \cos(+a-b+c) \cos(+a+b-c) \end{array} \right\}. \end{array} \right.$$

5. Mais, d'après une proposition de M. Catalan (*), on a

$$\begin{aligned} & \cos(+a+b+c) \cos(-a+b+c) \\ & \times \cos(+a-b+c) \cos(+a+b-c) \\ & = 4 \cos^2 a \cos^2 b \cos^2 c - (\cos a + \cos b + \cos c)(\cos a + \cos b - \cos c) \end{aligned}$$

(*) Page 456.

$$\begin{aligned}
& \times (\cos b + \cos c - \cos a)(\cos c + \cos a - \cos b) \\
&= 4 \cos^2 a \cos^2 b \cos^2 c + \cos^4 a + \cos^4 b + \cos^4 c \\
&\quad - 2 \cos^2 a \cos^2 b - 2 \cos^2 b \cos^2 c - 2 \cos^2 c \cos^2 a \\
&= + 4 \cos^2 a \cos^2 b \cos^2 c - 4(\cos^2 a \cos^2 b + \cos^2 b \cos^2 c + \cos^2 c \cos^2 a) \\
&\quad + (\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c)^2.
\end{aligned}$$

6. En vertu de cette dernière identité et des identités (B), l'équation (3) devient

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} [x - \cos(+a + b + c)][x - \cos(-a + b + c)] \\ \times [x - \cos(+a - b + c)][x - \cos(+a + b - c)] \\ + x^4 - 4 \cos a \cos b \cos c x^3 \\ + \left[4(\cos^2 a \cos^2 b + \cos^2 b \cos^2 c + \cos^2 c \cos^2 a) \right. \\ \left. - 2(\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c) \right] x^2 \\ - 4 \cos a \cos b \cos c (\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c - 2) x \\ + 4 \cos^2 a \cos^2 b \cos^2 c \\ - 4(\cos^2 a \cos^2 b + \cos^2 b \cos^2 c + \cos^2 c \cos^2 a) \\ \left. + (\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c)^2 \right\} x.
\end{array} \right.$$

7. Posant tour à tour

$$\begin{aligned}
x &= \cos(+a + b + c), & x &= \cos(-a + b + c), \\
x &= \cos(+a - b + c), & x &= \cos(+a + b - c),
\end{aligned}$$

on a quatre expressions identiquement nulles, dont la première coïncide avec ce que devient le premier membre de l'identité proposée, (A), quand on y remplace $\sin^2(a + b + c)$ par $1 - \cos^2(a + b + c)$, et qu'on ordonne suivant les puissances décroissantes de $\cos(a + b + c)$.