

JOS. SIVERING

**Des systèmes de deux équations à  
deux inconnues**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 2  
(1863), p. 372-387

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1863\\_2\\_2\\_372\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2_372_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## **DES SYSTÈMES DE DEUX ÉQUATIONS A DEUX INCONNUES ;**

**PAR M. Jos. SIVERING,**  
Ingénieur.

---

I. La résolution des systèmes de deux équations algébriques à pareil nombre d'inconnues présente, comme on sait, deux sortes de difficultés. Dans le cours des calculs, tantôt des solutions se perdent, tantôt il s'introduit des solutions étrangères à la question. Parmi les nombreuses recherches auxquelles cette matière a donné lieu, les plus complètes sont celles publiées par M. Bret dans le XV<sup>e</sup> Ca-

.

hier du *Journal de l'École Polytechnique*, sous le titre de *Mémoire sur la Méthode du plus grand commun diviseur appliquée à l'élimination*. M. Bret, en appliquant sa méthode à deux équations générales, l'une du sixième, l'autre du cinquième degré, donne le moyen de former une première équation à une inconnue du cent vingt-deuxième degré, qui contient les valeurs réelles et étrangères réunies, puis une autre équation du quatre-vingt-douzième degré, contenant les valeurs étrangères seules. Ces équations formées, il reste à diviser la première par la seconde, et le quotient du trentième degré, égalé à zéro, ne donnera plus que les valeurs réelles. On conçoit combien la formation d'équations de degrés aussi élevés est peu praticable. Aussi le système de M. Bret, quoique plus complet que d'autres, dégénère-t-il bien vite en une méthode de pure spéculation.

On a eu le tort, dans les investigations sur la matière, de laisser les facteurs étrangers s'accumuler, pour les écarter seulement lorsque l'équation finale est formée. On n'avait pas tiré parti de ce que les valeurs étrangères s'introduisent dans les polynômes avant la formation de l'équation finale, circonstance qui permet de classer ces valeurs une à une, au fur et à mesure qu'elles se produisent, sans en affecter les calculs extérieurs.

Nous établirons cette proposition, qui est de nature à simplifier la question des valeurs étrangères; et nous prendrons occasion d'exposer, en la complétant, la théorie des valeurs dites perdues. Nous le ferons en suivant la méthode consistant dans l'élimination successive des premiers et derniers termes, préparés par multiplication, au lieu d'employer le procédé des divisions successives, toujours plus compliqué et pourtant généralement suivi. Si ce dernier procédé obtient si souvent la préférence, c'est sans doute qu'on lui attribue la faculté

de se prêter mieux aux démonstrations. Comme, cependant, la méthode que nous allons suivre est incontestablement plus expéditive dans les applications, il n'est pas sans utilité de la raisonner et de montrer qu'elle permet de vaincre les difficultés de calcul par des moyens tout aussi bien fondés en théorie et plus efficaces dans la pratique.

II. Étant données deux équations à deux inconnues  $x$  et  $y$  du  $m^{\text{ième}}$  degré,

$$(1) \quad \begin{cases} x^m + (ay + b)x^{m-1} + \dots + (cy^{m-1} + \dots + d)x \\ + ey^m + \dots + f = 0, \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x^m + (a'y + b'x^{m-1} + \dots + (c'y^{m-1} + \dots + d')x \\ + e'y^m + \dots + f' = 0, \end{cases}$$

le moyen qui se présente naturellement pour trouver tous les couples de valeurs de  $x$  et de  $y$  capables d'y satisfaire, c'est d'éliminer une inconnue de manière à obtenir une équation finale ne contenant plus que l'autre inconnue et des nombres donnés. Pour établir des formules d'élimination, nous supposerons les deux équations ordonnées par rapport aux puissances descendantes de l'une des inconnues  $x$ , et la seconde inconnue  $y$  enveloppée dans les coefficients de  $x$ , comme le présentent déjà les expressions (1) et (2).

Les équations, ainsi préparées, prendront la forme suivante, où les coefficients  $g, h, k, l$ , etc., renfermeront  $y$ , mais pas  $x$ ,

$$(3) \quad \begin{cases} gx^m + hx^{m-1} + kx^{m-2} + lx^{m-3} + \dots \\ + px^3 + qx^2 + rx + s = 0, \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} g'x^m + h'x^{m-1} + k'x^{m-2} + l'x^{m-3} + \dots \\ + p'x^3 + q'x^2 + r'x + s' = 0. \end{cases}$$

Entre ces deux équations nous éliminerons le premier terme, en retranchant la seconde équation multipliée par

$g$  de la première multipliée par  $g'$ . Nous éliminerons le dernier terme en retranchant la seconde multipliée par  $s$  de la première multipliée par  $s'$  et en divisant le reste par  $x$ . De la sorte, les équations proposées seront remplacées par les suivantes :

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} (g'h - gh')x^{m-1} + (g'k - gk')x^{m-2} + (g'l - gl')x^{m-3} + \dots \\ \quad + (g'q - gq')x^2 + (g'r - gr')x + (g's - gs') = 0, \end{array} \right.$$

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} (gs' - g's)x^{m-1} + (hs' - h's)x^{m-2} + (ks' - k's)x^{m-3} + \dots \\ \quad + (ps' - p's)x^2 + (qs' - q's)x + (rs' - r's) = 0. \end{array} \right.$$

Au moyen de cette opération, les équations proposées (3) et (4) seront remplacées par deux autres (5) et (6), dans lesquelles l'inconnue  $x$  est abaissée d'un degré. Le même procédé appliqué aux équations (5) et (6), puis successivement aux couples d'équations qui en résultent, les abaissera chaque fois d'un degré. C'est ainsi qu'en représentant, pour abrégér, les équations (5) et (6) du degré  $m - 1$  en  $x$  par

$$(7) \quad Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \dots + Dx^2 + Ex - F = 0,$$

$$(8) \quad Fx^{m-1} + Gx^{m-2} + Hx^{m-3} + \dots + Kx^2 + Lx + M = 0,$$

on trouvera pour les transformées suivantes du degré  $m - 2$  en  $x$  :

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} (BF - AG)x^{m-2} + (CF - AH)x^{m-3} + \dots \\ \quad + (EF - AL)x - (F^2 + AM) = 0, \end{array} \right.$$

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} (F^2 + AM)x^{m-2} + (BM + FG)x^{m-3} + \dots \\ \quad + (DM + FK)x + (EM + FL) = 0, \end{array} \right.$$

puis, pour les transformées du degré  $m - 3$  en  $x$ ,

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} [(CF - AH)(F^2 + AM) - (BM + FG)(BF - AG)]x^{m-3} + \dots \\ \quad - [(F^2 + AM)^2 + (BF - AG)(EM + FL)] = 0, \end{array} \right.$$

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} [(F^2 + AM)^2 + (BF - AG)(EM + FL)]x^{m-3} + \dots \\ \quad + [(EF - AL)(EM + FL) + (DM + FK)(F^2 + AM)] = 0. \end{array} \right.$$

Ces opérations, en abaissant chaque fois  $x$  d'un degré, conduiront à un couple d'équations du premier degré en  $x$  de la forme

$$(13) \quad x = f(y) \quad \text{et} \quad x = \varphi(y).$$

III. Les formules ci-dessus sont formées dans l'hypothèse que les multiplicateurs, tels que  $g$  et  $g'$ ,  $s$  et  $s'$ , soient deux à deux premiers entre eux. Nous maintiendrons cette hypothèse plus bas, dans l'intérêt de la clarté des démonstrations. Les conséquences seraient les mêmes, s'il y avait des diviseurs communs, seulement elles porteraient sur les multiplicateurs simplifiés. Si, par exemple, nous avons  $g = \gamma\lambda$  et  $g' = \gamma'\lambda$ , les multiplicateurs ne seraient plus  $g$  et  $g'$ , mais bien  $\gamma$  et  $\gamma'$ , et c'est à ces dernières expressions que s'appliqueraient les propositions à établir.

IV. Reprenons les équations (13). On en déduit immédiatement  $f(y) = \varphi(y)$ , qui ne renferme plus  $x$ , et qui dès lors est l'équation finale. Comme les égalités n'ont pas été détruites par les diverses transformations opérées, il semble que tous les couples de valeurs de  $x$  et de  $y$  qui satisfont aux équations proposées satisferont aussi aux équations  $x = f(y)$  et  $f(y) = \varphi(y)$ , et réciproquement, de sorte qu'il ne resterait qu'à résoudre ces deux dernières équations. Cela serait exact s'il n'était pas survenu de perturbation dans le cours du calcul. Mais les facteurs en  $y$ , qui ont servi de multiplicateurs pour l'élimination, peuvent introduire dans les résultats des solutions étrangères à la question. Il peut aussi se perdre des valeurs appartenant à la question, par suite de la suppression, dans le cours du calcul, de quelque facteur commun en  $y$ . Ces circonstances rendent l'équation finale incertaine. Nous allons nous occuper successivement des valeurs étran-

gères et des valeurs perdues, et donner des moyens faciles de lever tous les doutes.

V. *Des valeurs étrangères.* — L'inspection des résultats trouvés plus haut montre que, passé les équations initiales, la première équation de chaque couple a pour dernier terme le coefficient, pris en signe contraire, du premier terme de la seconde équation. C'est ainsi que le dernier terme de l'équation (5) est  $g's - gs'$ , et que le premier terme de l'équation (6) a pour coefficient  $gs' - g's$ . De même l'équation (9) se termine par le terme

$$-(F^2 + AM)$$

et l'équation (10) commence par  $F^2 + AM$ .

*Ce sont précisément ces fonctions qui, deux fois facteurs dans l'élimination, introduisent des solutions étrangères dans les résultats. Ils se reproduisent comme facteurs communs à tous les coefficients du couple de transformées de deux degrés inférieur en  $x$ .*

Pour le faire voir, il suffira de démontrer que l'expression  $F$ , qui occupe ladite position dans les équations du  $(m-1)^{i\grave{e}me}$  degré (7) et (8), apparaît comme facteur commun dans les équations du  $(m-3)^{i\grave{e}me}$  degré (11) et (12). Mettons dans ces deux dernières  $F$  en évidence, et elles deviendront

$$\begin{array}{l}
 (14) \left\{ \begin{array}{l} [F(CF^2 - AFH - B^2M - BFG + AG^2 + ACM) \\ \quad + AM(BG - AH)] x^{m-3} + \dots \\ + [F(AGL - BEM - BFL - F^3 - 2AMF) \\ \quad - AM(AM - EG)] = 0, \end{array} \right. \\
 (15) \left\{ \begin{array}{l} [-F(AGL - BEM - BFL - F^3 - 2AMF) \\ \quad + AM(AM - EG)] x^{m-3} + \dots \\ + [F(E^2M - EFL - AL^2 + F^2K + AKM + DFM) \\ \quad + AM(DM - EL)] = 0. \end{array} \right.
 \end{array}$$

La fonction  $F$  se trouve être explicitement facteur commun à une partie des coefficients. Il reste à faire voir qu'elle l'est aussi dans l'autre, savoir, dans

$$BG - AH, \quad AM - EG, \dots, \quad DM - EL.$$

A cet effet, remarquons que les coefficients des équations (7) et (8) ne sont que des abréviations de ceux des équations (5) et (6), que nous avons

$$A = g'h - gh', \quad B = g'h - gh',$$

et ainsi de suite. Il viendra donc

$$\begin{aligned} BG - AH &= (g'h - gh')(hs' - h's) - (g'h - gh')(ks' - k's) \\ &= (g's' - g's)(h'k - hk') = F(h'k - hk'), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AM - EG &= (g'h - gh')(rs' - r's) - (g'r - gr')(hs' - h's) \\ &= (g's' - g's)(hr' - h'r) = F(hr' - h'r), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DM - EL &= (g'q - gq')(rs' - r's) - (g'r - gr')(qs' - q's) \\ &= (g's' - g's)(qr' - q'r) = F(qr' - q'r). \end{aligned}$$

On trouve donc  $F$  comme facteur commun à tous les termes des coefficients des équations (11) et (12).

VI. Cette propriété importante donne le moyen de débarrasser les équations des facteurs étrangers à mesure qu'ils se produisent. A cet effet, *il faut diviser chaque couple de transformées par le coefficient qui termine la première et commence la seconde des deux équations formant le couple de deux degrés plus élevé en  $x$ .*

Cette opération n'aura pas seulement l'avantage d'écartier les valeurs étrangères, mais elle simplifiera encore singulièrement les calculs ultérieurs.

$F$  n'est pas le seul multiplicateur qui serve à passer des transformées du degré  $m - 1$  aux transformées suivantes; il y a encore  $A$  et  $M$ . Mais ces expressions ne



peuvent devenir facteurs communs au même titre que  $F$ ; c'est ce qu'il est aisé de reconnaître à l'inspection des résultats trouvés (14) et (15). Seulement  $A$  et  $M$  contribuent à former dans le degré  $m - 2$  le facteur générateur de solutions étrangères, facteur qui sera  $F^2 + AM$ .

VII. Quand l'une des équations (13), par exemple  $x = f(y)$ , présente la valeur de  $x$  sous une forme suffisamment simple, on peut s'assurer de l'exactitude des résultats de la manière suivante. On remplacera  $x$  par sa valeur  $f(y)$  dans les équations proposées (3) et (4). On aura alors deux équations en  $y$  seule, qui devront exister simultanément, et dont, par conséquent, le plus grand commun diviseur formera la véritable équation finale.

VIII. *Des valeurs perdues.* — Des solutions inhérentes à la question se perdent lorsque dans l'une des transformées on trouve un facteur commun à tous les coefficients des termes en  $x$ , et qu'on supprime ce facteur comme inutile. Supposons que  $Y$  soit un pareil facteur, trouvé pour la première fois dans l'équation (9) et autre, bien entendu, que les facteurs générateurs de valeurs étrangères.

*Ce facteur  $Y$  sera un polynôme premier avec les coefficients  $A$  et  $F$  des transformées précédentes.*

Pour le faire voir, on peut, en vertu de l'hypothèse, poser des identités de la forme

$$(16) \quad \begin{cases} BF - AG = PY, & CF - AH = QY, \dots, \\ EF - AL = RY, & F^2 + AM = SY, \dots \end{cases}$$

Si  $Y$  avait un facteur commun  $\mu$  avec  $A$ , par exemple, les termes  $AG$  et  $PY$  de la première des identités (16) seraient affectés de ce facteur  $\mu$ , donc l'autre terme  $BF$  le serait aussi. Or,  $F$  étant premier avec  $A$  (III) ne pourrait pas l'être, ce serait donc  $B$  qui aurait  $\mu$  pour diviseur.

Les identités suivantes montrent que C, . . . , E seraient dans le même cas. Par conséquent l'équation (7) admettrait un facteur commun  $\mu$ , contrairement à l'hypothèse qui veut que ce facteur apparaisse pour la première fois dans l'équation (9).

IX. *Le facteur Y, commun à l'équation (9), le sera aussi à l'équation (10).*

Le premier coefficient de l'équation (10) vaut  $-SY$  et admet Y comme facteur. De plus, les identités  $BF - AG = PY$  et  $F^2 + AM = SY$  étant multipliées respectivement par M et G, puis ajoutées, donneront  $F(BM + FG) = (MP + GS)Y$ , identité dans laquelle F est premier avec Y, et qui partant ne peut exister qu'autant que  $BM + FG$  soit affecté du facteur Y. Donc le coefficient du terme en  $x^{m-3}$  de l'équation (10) est divisible par Y. Au moyen des autres identités (16), on peut démontrer de même que les coefficients ultérieurs de l'équation (10) sont divisibles par Y.

X. *En posant  $Y = 0$ , les équations (7) et (8) se réduisent à une seule et même équation.*

Pour le démontrer, remarquons que les identités (16) donnent

$$B = \frac{PY + AG}{F}, \quad C = \frac{QY + AH}{F},$$

$$E = \frac{RY + AL}{F}, \quad F = \frac{SY - AM}{F}.$$

Ces expressions de B, C, E, F, étant remplacées dans l'équation (7), la transforment en

$$Ax^{m-1} + \frac{PY + AG}{F}x^{m-2} + \dots + \frac{RY + AL}{F}x - \frac{SY - AM}{F} = 0.$$

En faisant maintenant  $Y = 0$  et multipliant par  $\frac{F}{A}$ , on obtient l'équation (8).

XI. *L'équation  $Y = 0$  et l'une ou l'autre des transformées (7) et (8) forment un système de solutions du problème, et sont le seul système auquel donne lieu le polynôme  $Y$  annulé.*

D'abord nous pouvons admettre que les équations (7) et (8) ne renferment pas de valeurs étrangères, puisque nous avons appris à les écarter dès leur formation. D'ailleurs, ces transformées dérivent des équations initiales, et sont satisfaites l'une et l'autre par  $Y = 0$ . Enfin le facteur commun, n'étant apparu que dans les transformées (9) et (10), ne peut avoir fait évanouir des solutions dans les transformations précédentes, de sorte qu'il serait superflu de remonter aux équations initiales pour les combiner avec le facteur égalé à zéro, dans l'espoir d'obtenir un plus grand nombre de solutions.

XII. Ainsi, pour retrouver les valeurs dites perdues, il faut procéder comme suit : *Dès que, dans l'une des transformées, il se présente un facteur commun en  $y$ , autre que celui générateur des solutions étrangères, il faut égaler ce facteur à zéro, remplacer les valeurs de  $y$  que cette équation donnera dans l'une ou l'autre des transformées de l'ordre précédent, laquelle donnera à son tour les valeurs correspondantes de  $x$ . On continuera ensuite l'élimination sur les transformées débarrassées du facteur commun, jusqu'à ce qu'on obtienne les équations finales*

$$x = f(y), \quad x = \varphi(y) \quad \text{et} \quad f(y) = \varphi(y),$$

qui donneront les autres systèmes de valeurs des inconnues.

Nous avons démontré que le facteur  $Y$ , commun à l'une des transformées, l'est également à l'autre transformée du même couple. Si donc on négligeait de le supprimer, il se reproduirait dans les transformées suivantes.

En l'égalant alors à zéro, et en remontant d'un degré, on trouverait évidemment pour  $x$  des valeurs de la forme  $\frac{0}{0}$ .

Il est donc essentiel de supprimer les facteurs communs des coefficients, dès qu'ils se présentent, non-seulement pour simplifier les calculs, et pour obtenir toutes les solutions du problème, mais encore pour ne pas être conduit à des résultats propres à induire en erreur.

XIII. Quoique les valeurs perdues ne fassent pas partie de celles que donne l'équation finale, leur existence n'est pourtant pas un incident, mais un phénomène tout à fait normal. L'équation de la forme  $x = f(y)$ , que donne l'élimination, n'attribue à  $x$  qu'une valeur pour chaque valeur de  $y$ . Or, il est de l'essence des systèmes de deux équations à pareil nombre d'inconnues d'un degré supérieur au premier, et il doit arriver, généralement parlant, que plusieurs valeurs de  $x$  correspondent à une même valeur de  $y$ . Quand cette circonstance se présente, l'analyse doit l'indiquer par un indice quelconque, et c'est précisément alors qu'apparaissent les facteurs communs. Les solutions données par ces derniers sont donc pour le moins aussi conformes à l'esprit du calcul algébrique que celles données par l'équation finale.

La théorie qui vient d'être exposée sur les équations à deux inconnues en réduit la résolution à celle d'équations à une inconnue, que nous sommes parvenu à préparer de manière à ne renfermer ni plus ni moins que les solutions cherchées, et qui, dès lors, peuvent être traitées par les procédés en usage pour les problèmes à une inconnue. Cette théorie permet en outre de réduire à leur forme la plus simple les polynômes sur lesquels on a besoin d'opérer.

Il nous reste à l'appuyer de quelques applications.

*Applications.* — Soient à résoudre les deux équations du quatrième degré

$$\begin{aligned}x^4 + x^3 + yx^2 - 11y^3 - 5y^2 - 6y - 6 &= 0, \\x^4 + x^2 + xy - 9y^3 - 2y^2 - 5y - 6 &= 0.\end{aligned}$$

Les transformées du troisième degré seront

$$\begin{aligned}x^3 + (y - 1)x^2 + (2y^3 + 3y^2 + y) &= 0, \\(2y^3 + 3y^2 + y)x^3 + (-9y^3 - 2y^2 - 5y - 6)x^2 \\+ (-9y^4 + 9y^3 + 6)x + 11y^4 + 5y^3 + 6y^2 + 6y &= 0.\end{aligned}$$

Les transformées suivantes du deuxième degré deviendront, toutes multiplications faites,

$$\begin{aligned}(2y^4 + 10y^3 + 4y + 6)x^2 + (7y^4 - 12y^3 - y^2 - 6)x \\- (4y^6 + 12y^5 + 24y^4 + 11y^3 + 7y^2 + 6y) &= 0, \\(4y^6 + 12y^5 + 24y^4 + 11y^3 + 7y^2 + 6y)x^2 \\- (18y^6 + 20y^5 + 31y^4 + 28y^3 + 23y^2 + 12y)x \\+ (-18y^7 - 9y^6 + 7y^5 + 4y^4 + 6y^3 + 12y^2 + 6y) &= 0.\end{aligned}$$

Nous aurons ensuite pour transformées du premier degré

$$\begin{aligned}(64y^{16} + 256y^9 + 282y^8 + 215y^7 + 383y^6 \\+ 373y^5 + 195y^4 + 188y^3 + 144y^2 + 36y)x \\- 116y^{12} + 60y^{11} + 138y^{10} + 588y^9 \\+ 902y^8 + 652y^7 + 659y^6 + 632y^5 \\+ 289y^4 + 168y^3 + 132y^2 + 36y) &= 0,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(16y^{12} + 60y^{11} + 138y^{10} + 588y^9 + 902y^8 \\+ 652y^7 + 659y^6 + 632y^5 + 289y^4 + 168y^3 \\+ 132y^2 + 36y)x - (72y^{12} + 422y^{11} + 643y^{10} \\+ 987y^9 + 1565y^8 + 1490y^7 + 1279y^6 + 1073y^5 \\+ 569y^4 + 264y^3 + 144y^2 + 36y) &= 0.\end{aligned}$$

Ainsi que nous l'avons démontré (V), ces deux équations doivent avoir pour facteur commun l'expression  $2y^3 + 3y^2 + y$ , qui est l'un des coefficients des transformées du troisième degré. En effet, en divisant les deux équations du premier degré par  $2y^3 + 3y^2 + y$ , nous trouvons les quotients exacts

$$\begin{aligned} & (32y^7 + 80y^6 + 5y^5 + 60y^4 + 99y^3 + 8y^2 + 36y + 36)x \\ & - (8y^9 + 18y^8 + 38y^7 + 228y^6 + 90y^5 + 77y^4 \\ & + 169y^3 + 24y^2 + 24y + 36) = 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & (8y^9 + 18y^8 + 38y^7 + 228y^6 + 90y^5 + 77y^4 \\ & + 169y^3 + 24y^2 + 24y + 36)x - (36y^9 + 157y^8 \\ & + 68y^7 + 313y^6 + 279y^5 + 170y^4 + 245y^3 \\ & + 84y^2 + 36y + 36) = 0. \end{aligned}$$

Ces deux transformées du premier degré en  $x$  donnent pour équation en  $y$  seule

$$\begin{aligned} & 64y^{18} + 228y^{17} - 220y^{16} - 2888y^{15} - 3824y^{14} \\ & + 3399y^{13} + 17008y^{12} + 4124y^{11} + 6405y^{10} \\ & + 15831y^9 - 7109y^8 - 7904y^7 - 2034y^6 - 10492y^5 \\ & - 7104y^4 - 2376y^3 - 2304y^2 - 864y = 0. \end{aligned}$$

Conformément à la règle établie (V), cette équation doit encore être divisée par

$$4y^6 + 12y^5 + 24y^4 + 11y^3 + 7y^2 + 6y,$$

coefficient qui termine l'une et commence l'autre des transformées du second degré. La division, étant opérée, donnera pour véritable équation finale

$$\begin{aligned} & 16y^{12} + 24y^{11} - 223y^{10} - 241y^9 + 1011y^8 - 190y^7 - 227y^6 \\ & + 828y^5 - 406y^4 - 352y^3 + 120y^2 - 216y - 144 = 0, \end{aligned}$$

dans laquelle les valeurs réelles de  $y$  sont  $-0,732$ ,  $+1$ ,  $+2$  et  $+2,732$ .

Toute autre méthode que celle employée aurait conduit à des polynômes d'une puissance bien plus élevée.

Soit proposé pour second exemple :

$$x^3 + (3y - 1)x^2 - (y^2 + 2y + 8)x - 12y^3 = 0,$$

$$x^3 + (2y + 1)x^2 - (2y^2 + 2y + 9)x - 15y^3 = 0.$$

L'élimination des premiers, puis des derniers termes donne les deux transformées suivantes :

$$(y - 2)x^2 + (y^2 + 1)x + 3y^3 = 0,$$

$$x^2 + (7y - 9)x + 3y^2 - 2y - 4 = 0.$$

L'élimination suivante donnera

$$(-6y^2 + 23y - 17)x + 8y^3 - 8 = 0,$$

$$(-8y^2 + 8)x - 18y^3 + 25y^2 - y^2 - 2y - 4 = 0.$$

Ces deux équations ont un facteur commun  $y - 1$ . Avant de le supprimer, combinons-le avec l'une ou l'autre des transformées du second degré en  $x$ , et nous aurons

$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Il y a donc un premier système de valeurs, représenté par

$$y - 1 = 0 \quad \text{et} \quad x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Nous aurions obtenu les mêmes valeurs, mais nous n'en aurions pas eu d'autres, en remplaçant  $y$  par  $1$  dans les équations initiales. Celles-ci seraient devenues

$$x^3 + 2x^2 - 11x - 12 = (x + 4)(x^2 - 2x - 3) = 0$$

et

$$x^3 + 3x^2 - 13x - 15 = (x + 5)(x^2 - 2x - 3) = 0.$$

Dans ces équations les facteurs  $x + 4$  et  $x + 5$  ne peu-

vent s'anéantir ensemble, et c'est le plus grand commun diviseur  $x^2 - 2x - 3$  qui, égal à zéro, donne les valeurs de  $x$  correspondantes à  $y - 1 = 0$ , comme nous l'avions déjà trouvé.

Les transformées du premier degré en  $x$  étant maintenant débarrassées du facteur commun  $y - 1$  deviendront

$$(6y - 17)x - 8y - 8 = 0$$

et

$$(8y + 8)x + 18y^3 - 7y^2 - 6y - 4 = 0.$$

On en déduit

$$64(y + 1)^2 + (6y - 17)(18y^3 - 7y^2 - 6y - 4) = 0,$$

ou bien

$$+ 108y^4 - 348y^3 + 147y^2 + 206y + 132 = 0.$$

Telle est la véritable équation finale, attendu que, dans les transformées antérieures de deux degrés ou plus, il ne s'est pas trouvé de fonction en  $y$  formant le dernier coefficient de l'une et le premier de l'autre. La fonction de l'espèce  $8y + 8$  ne remonte que d'un degré et n'introduit pas de valeurs étrangères dans l'équation finale.

Comme l'une des équations en  $x$ , savoir

$$(6y - 17)x - 8y - 8 = 0,$$

est assez simple, on peut, comme il a été dit (VII), s'assurer de l'absence des valeurs étrangères dans l'équation finale, en substituant dans les proposées à  $x$  sa valeur  $\frac{8y + 8}{6y - 17}$ . Les équations proposées deviendront alors

$$\begin{aligned} & - 648y^6 + 5436y^5 - 15126y^4 \\ & + 14457y^3 + 890y^2 - 2500y - 4224 = 0, \\ & - 3240y^6 + 26964y^5 - 75150y^4 \\ & + 72687y^3 + 3744y^2 - 13176y - 21384 = 0. \end{aligned}$$



( 387 )

La recherche du plus grand commun diviseur entre ces deux polynômes montrera qu'ils valent

$$108y^4 - 348y^3 + 147y^2 + 206y + 132$$

multiplié respectivement par  $-6y^2 + 31y - 32$  et par  $-30y^2 + 153y - 162$ , c'est-à-dire qu'ils ont pour plus grand commun diviseur l'expression que nous avons trouvée pour équation finale, ainsi que cela doit être.

---

---