

E. BELTRAMI

Solution de la question 610

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 355-362

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__355_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 610 ;

PAR M. E. BELTRAMI.

Soient donnés une surface du second degré, la sphère exceptée, et un point fixe, lieu d'un spectateur; sous quel angle verra-t-il la surface?

1. Soit

$$(1) \quad \varphi(x, y, z) = 0$$

l'équation de la surface du second degré rapportée à trois axes rectangulaires, (x_0, y_0, z_0) le point fixe, lieu du spectateur.

Un rayon visuel quelconque est représenté par les équations

$$(2) \quad \frac{x - x_0}{\lambda} = \frac{y - y_0}{\mu} = \frac{z - z_0}{\nu} = \rho;$$

λ, μ, ν déterminent sa direction, ρ la position d'un quelconque de ses points. Substituant dans l'équation (1) les valeurs de x, y, z données par les équations (2), et écrivant φ_0 pour $\varphi(x_0, y_0, z_0)$, on obtient l'équation sui-

vante :

$$0 = \varphi_0 + \rho \left(\lambda \frac{d\varphi_0}{dx_0} + \mu \frac{d\varphi_0}{dy_0} + \nu \frac{d\varphi_0}{dz_0} \right) \\ + \frac{\rho^2}{2} \left(\lambda^2 \frac{d^2\varphi_0}{dx_0^2} + \mu^2 \frac{d^2\varphi_0}{dy_0^2} + \nu^2 \frac{d^2\varphi_0}{dz_0^2} + 2\mu\nu \frac{d^2\varphi_0}{dy_0 dz_0} \right. \\ \left. + 2\nu\lambda \frac{d^2\varphi_0}{dz_0 dx_0} + 2\lambda\mu \frac{d^2\varphi_0}{dx_0 dy_0} \right),$$

où $\frac{d\varphi_0}{dx_0}, \frac{d^2\varphi_0}{dx_0^2}, \dots$, représentent ce que deviennent les dérivées $\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d^2\varphi}{dx^2}, \dots$, quand on y remplace x, y, z par x_0, y_0, z_0 . Cette équation donne les valeurs de ρ répondant aux deux intersections du rayon avec la surface; donc, si le rayon touche la surface, ces deux valeurs doivent être égales, c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$\left(\lambda \frac{d\varphi_0}{dx_0} + \mu \frac{d\varphi_0}{dy_0} + \nu \frac{d\varphi_0}{dz_0} \right)^2 \\ = 2\varphi_0 \left(\lambda^2 \frac{d^2\varphi_0}{dx_0^2} + \mu^2 \frac{d^2\varphi_0}{dy_0^2} + \nu^2 \frac{d^2\varphi_0}{dz_0^2} + 2\mu\nu \frac{d^2\varphi_0}{dy_0 dz_0} \right. \\ \left. + 2\nu\lambda \frac{d^2\varphi_0}{dz_0 dx_0} + 2\lambda\mu \frac{d^2\varphi_0}{dx_0 dy_0} \right).$$

En éliminant de cette équation λ, μ, ν au moyen des équations (2), on aura évidemment l'équation du cône visuel. Ainsi, en rapportant ce cône à trois nouveaux axes parallèles aux premiers et avec l'origine à son sommet, l'équation du cône visuel sera la suivante

$$(3) \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fzx = 0,$$

où

$$A = \left(\frac{d\varphi_0}{dx_0} \right)^2 - 2\varphi_0 \frac{d^2\varphi_0}{dx_0^2}, \quad B = \left(\frac{d\varphi_0}{dy_0} \right)^2 - 2\varphi_0 \frac{d^2\varphi_0}{dy_0^2}, \\ C = \left(\frac{d\varphi_0}{dz_0} \right)^2 - 2\varphi_0 \frac{d^2\varphi_0}{dz_0^2},$$

$$D = \frac{d\varphi_0}{dy_0} \frac{d\varphi_0}{dz_0} - 2\varphi_0 \frac{d^2\varphi_0}{dy_0 dz_0}, \quad E = \frac{d\varphi_0}{dz_0} \frac{d\varphi_0}{dx_0} - 2\varphi_0 \frac{d^2\varphi_0}{dz_0 dx_0},$$

$$F = \frac{d\varphi_0}{dx_0} \frac{d\varphi_0}{dy_0} - 2\varphi_0 \frac{d^2\varphi_0}{dx_0 dy_0}.$$

Dans l'équation (3), x, y, z indiquent des coordonnées relatives aux nouveaux axes, mais x_0, y_0, z_0 sont toujours les coordonnées du point fixe par rapport aux axes primitifs.

2. Cherchons maintenant à faire disparaître de l'équation du cône les termes contenant les produits des variables.

Pour cela nous rapporterons le cône à un nouveau système d'axes rectangulaires des x', y', z' ayant même origine que le système précédent.

L'équation du cône se trouvera ramenée à la forme

$$(4) \quad ax'^2 + by'^2 + cz'^2 = 0.$$

On sait que a, b, c sont les trois racines de l'équation du troisième degré en λ

$$(5) \quad \begin{vmatrix} A - \lambda & F & E \\ F & B - \lambda & D \\ E & D & C - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

que nous désignerons, pour abrégé, par $\Delta = 0$ (*).

3. On sait également que l'équation $\Delta = 0$ a toujours ses trois racines réelles. Mais, dans le cas actuel, il importe de remarquer que ces racines ne sauraient être toutes trois de même signe, sans que le cône visuel cessât d'être réel. Voulant donc laisser de côté cette hypothèse, nous admettrons que l'une de ces racines, par exemple a ,

(*) Nous supprimons la démonstration que M. Beltrami donne de cette propriété bien connue de l'équation $\Delta = 0$, qui n'est autre que l'équation en s de nos Traités élémentaires. P.

soit de signe contraire aux deux autres. On peut même supposer que a soit une quantité positive; car si elle ne l'était pas, il suffirait de changer le signe de chacune des quantités $A, B, \text{etc.}$, ainsi qu'il est évidemment permis de le faire. Nous admettrons donc que a est une quantité positive, b et c deux quantités négatives. D'après ces hypothèses, il est clair que, des trois axes du cône visuel, celui des x' lui est intérieur, tandis que ceux des y' et des z' lui sont extérieurs. Nous ne considérerons de ce cône que la nappe qui s'étend du côté des x' positives.

4. Cela posé, concevons la surface sphérique dont le centre est au sommet du cône et dont le rayon $= 1$. Le cône visuel coupe cette surface suivant une ellipse sphérique dont le centre intérieur est le point où la surface sphérique est percée par l'axe positif des x' . Nous mesurerons l'angle solide du cône visuel par le rapport de l'aire de cette ellipse sphérique à l'aire de la surface totale de la sphère. Ainsi la question est ramenée à trouver l'aire de l'ellipse sphérique.

En rapportant les points de la surface sphérique à un système de coordonnées polaires, par les formules connues

$$x' = \cos \alpha \cos \epsilon, \quad y' = \sin \alpha \cos \epsilon, \quad z' = \sin \epsilon,$$

l'équation en α, ϵ de l'ellipse sphérique est la suivante

$$a \cos^2 \alpha \cos^2 \epsilon + b \sin^2 \alpha \cos^2 \epsilon + c \sin^2 \epsilon = 0.$$

La quantité $-c \operatorname{tang}^2 \epsilon$ étant positive par hypothèse, il en est de même de $a \cos^2 \alpha + b \sin^2 \alpha$, et à plus forte raison de $a \cos^2 \alpha + b \sin^2 \alpha - c$; on peut donc mettre l'équation précédente sous la forme

$$(6) \quad \sin \epsilon = \frac{\sqrt{a \cos^2 \alpha + b \sin^2 \alpha}}{\sqrt{a \cos^2 \alpha + b \sin^2 \alpha - c}},$$

où les radicaux sont pris positivement, parce qu'on n'a besoin de considérer que le quart d'ellipse situé dans la région des x', y', z' positives.

Or, la formule générale pour la quadrature indéfinie des aires sphériques est $\int \sin \delta \, d\alpha$; si donc on remarque que notre figure sphérique est symétrique par rapport aux arcs de grands cercles $\alpha = 0$, $\delta = 0$, on aura, en nommant Ω la valeur de l'angle solide en question,

$$(7) \quad \Omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha_0} d\alpha \frac{\sqrt{a \cos^2 \alpha + b \sin^2 \alpha}}{\sqrt{a \cos^2 \alpha + b \sin^2 \alpha - c}},$$

α_0 étant la valeur de α qui répond à $\delta = 0$, c'est-à-dire la valeur réelle et positive donnée par l'équation

$$b \operatorname{tang}^2 \alpha_0 + a = 0 \quad \text{ou} \quad \sin^2 \alpha_0 = \frac{a}{a-b}.$$

Posons

$$(8) \quad a \cos^2 \alpha + b \sin^2 \alpha = \lambda,$$

où λ est une nouvelle variable. En écrivant cette relation sous la forme

$$a - (a-b) \sin^2 \alpha = \lambda,$$

on voit facilement que depuis $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = \alpha_0$, λ est toujours positive et décroissante depuis la valeur $\lambda = a$ jusqu'à la valeur $\lambda = 0$, de sorte que les quantités $a - \lambda$, $\lambda - b$, $\lambda - c$ ne deviennent jamais négatives dans les limites de l'intégration. On peut donc tirer de l'équation (8)

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{\lambda - b}}{\sqrt{a - b}}, \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{a - \lambda}}{\sqrt{a - b}},$$

et par suite

$$d\alpha = - \frac{d\lambda}{2 \sqrt{a - \lambda} \sqrt{\lambda - b}},$$

formules dans lesquelles les radicaux sont pris positivement par la même raison que ci-dessus.

Moyennant cette transformation, la formule (7) devient

$$\Omega = -\frac{1}{2\pi} \int_a^0 \frac{d\lambda \sqrt{\lambda}}{\sqrt{(a-\lambda)(\lambda-b)(\lambda-c)}}.$$

Or a, b, c étant les trois racines de l'équation $\Delta = 0$, le polynôme Δ ne peut différer que par un facteur numérique de l'expression $(a-\lambda)(\lambda-b)(\lambda-c)$; mais le terme en λ^3 a évidemment même coefficient dans les deux expressions, donc celles-ci sont absolument identiques, et conséquemment on peut poser

$$\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^a d\lambda \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\Delta}}.$$

Telle est la formule qui donne la valeur de l'angle en question.

5. On peut vérifier cette formule en faisant des hypothèses spéciales :

1° Supposons en premier lieu que la surface donnée soit une sphère, c'est-à-dire que l'on ait

$$2\varphi = x^2 + y^2 + z^2 - r^2,$$

et que le point fixe soit pris sur l'axe des x à une distance h de l'origine ($h > r$). On aura dans ce cas

$$x_0 = h, \quad y_0 = z_0 = 0, \quad 2\varphi_0 = h^2 - r^2,$$

et par suite

$$A = r^2, \quad B = -(h^2 - r^2), \quad C = -(h^2 - r^2),$$

$$D = E = F = 0,$$

$$\Delta = (r^2 - \lambda)(h^2 - r^2 - \lambda)^2, \quad a = r^2;$$

d'où enfin

$$\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{r^2} \frac{d\lambda \sqrt{\lambda}}{(h^2 - r^2 + \lambda) \sqrt{r^2 - \lambda}}.$$

En posant

$$\lambda = \frac{r^2 t^2}{1 + t^2},$$

où t est une nouvelle variable, cette formule se transforme en la suivante

$$\Omega = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dt}{1 + t^2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dt}{1 + \left(\frac{ht}{\sqrt{h^2 - r^2}} \right)^2},$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$\Omega = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{h^2 - r^2}}{h} \right).$$

On reconnaît immédiatement l'exactitude de ce résultat, si l'on se rappelle la formule connue pour la mesure de la zone sphérique.

2° Supposons maintenant que la surface soit quelconque, mais que le point (x_0, y_0, z_0) soit pris sur elle. Il est évident en ce cas que, d'après les conventions adoptées, on doit trouver un angle visuel représenté par $\frac{1}{2}$.

Or φ_0 étant = 0 par hypothèse, on a ici

$$A = \left(\frac{d\varphi_0}{dx_0} \right)^2, \quad D = \frac{d\varphi_0}{dy_0} \frac{d\varphi_0}{dz_0},$$

$$B = \left(\frac{d\varphi_0}{dy_0} \right)^2, \quad E = \frac{d\varphi_0}{dz_0} \frac{d\varphi_0}{dx_0},$$

$$C = \left(\frac{d\varphi_0}{dz_0} \right)^2, \quad F = \frac{d\varphi_0}{dx_0} \frac{d\varphi_0}{dy_0},$$

(362)

d'où l'on tire, après des réductions faciles,

$$\Delta = \lambda^2 (a - \lambda), \quad a = \left(\frac{d\varphi_0}{dx_0} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi_0}{dy_0} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi_0}{dz_0} \right)^2.$$

La formule générale donne donc dans le cas actuel

$$\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^a \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(a-\lambda)}}.$$

Posons

$$\lambda = a \sin^2 \theta, \quad a - \lambda = a \cos^2 \theta,$$

d'où

$$d\lambda = 2a \sin \theta \cos \theta d\theta.$$

En introduisant ces valeurs, la formule ci-dessus devient simplement

$$\Omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{1}{2},$$

ce qui donne le résultat prévu.
