

ABRAHAM SCHNÉE

Solution de la question 521

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 326-328

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2_326_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 524

(voir t. XIX, p. 96);

PAR M. ABRAHAM SCHNÉE,
Élève du lycée Charlemagne.

Soit décrite une ellipse ayant pour axes une normale et la tangente adjacente quelconque d'une ellipse donnée et touchant le grand axe de l'ellipse au centre ; et de même soit décrite une seconde ellipse touchant le petit axe au centre ; les lieux des foyers de ces ellipses sont deux cercles concentriques à l'ellipse donnée et ayant pour rayons la demi somme et la demi-différence des axes.

Soit

$$(1) \quad a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

l'ellipse donnée.

Soit

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (m\gamma + nx + p)^2$$

l'équation de l'ellipse mobile, α et β étant les coordonnées

du foyer. On a d'abord, pour exprimer que la courbe passe par l'origine,

$$(2) \quad \alpha^2 + \beta^2 = p^2.$$

Pour qu'en outre l'axe des x soit tangent à la courbe en ce point, il faut que le coefficient de x soit nul, ce qui donne

$$(3) \quad \alpha + np = 0.$$

Les coordonnées du centre de la courbe, en ayant égard à l'équation (3), sont

$$x = mn \frac{\beta + mp}{1 - m^2 - n^2}, \quad y = (1 - n^2) \frac{\beta + mp}{1 - m^2 - n^2};$$

et comme il faut que ce point soit sur l'ellipse donnée, nous aurons

$$(4) \quad a^2 (1 - n^2)^2 + b^2 m^2 n^2 = a^2 b^2 \frac{(1 - m^2 - n^2)^2}{(\beta + mp)^2}.$$

Je forme maintenant l'équation qui, dans une conique, donne les coefficients angulaires des diamètres conjugués rectangulaires

$$mn \mu^2 - (m^2 - n^2) \mu - mn = 0.$$

Pour exprimer que la courbe mobile a pour axes la tangente et la normale adjacente de l'ellipse proposée, il suffit de remplacer μ par le coefficient angulaire de la tangente au point considéré, et nous aurons enfin

$$(5) \quad a^4 (1 - n^2)^2 - a^2 b^2 (m^2 - n^2) (1 - n^2) - b^4 m^2 n^2 = 0.$$

Entre les équations (2), (3), (4) et (5), éliminons m , n et p , nous aurons l'équation du lieu.

De l'équation (2), je tire

$$n = -\frac{\alpha}{p},$$

et je remplace dans l'équation (5). On a comme solution étrangère

$$a^2 \beta^2 + b^2 \alpha^2 = 0, .$$

et, après l'avoir supprimée,

$$(6) \quad m^2 = \frac{a^2}{b^2} \left(1 - \frac{\alpha^2}{p^2} \right).$$

Substituons ces valeurs de n et de m^2 dans l'équation (4), il vient après réductions

$$(7) \quad 2 p \beta m = \frac{p^2 - \alpha^2}{b^2} \left[\frac{(a^2 - b^2)^2}{p^2} - a^2 \right] - \beta^2.$$

Éliminons m entre les équations (6) et (7), et p au moyen de la relation (2), nous aurons définitivement l'équation

$$[\alpha^2 + \beta^2 - (a - b)^2][\alpha^2 + \beta^2 - (a + b)^2] = 0,$$

qui se dédouble en

$$(8) \quad \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = (a - b)^2, \\ \alpha^2 + \beta^2 = (a + b)^2, \end{cases}$$

résultat conforme à l'énoncé.

Si nous remarquons qu'il n'a été fait aucune hypothèse sur les grandeurs respectives de a et de b , nous concluons immédiatement de la symétrie des formules (8) qu'on obtient les mêmes lieux, que ce soit le petit ou le grand axe qui coïncide avec l'axe des x . Si l'on vient alors à faire tourner l'une des figures d'un angle égal à $\frac{\pi}{2}$, de façon que les deux ellipses se recouvrent, les cercles obtenus se superposeront pendant toute la rotation, et le théorème sera démontré dans les deux cas.

Note. — La même question a été traitée par M. N. R., de Gand.
