

JOSEPH SACCHI

Note sur l'enveloppe d'une droite

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 31-35

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__31_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR L'ENVELOPPE D'UNE DROITE;

PAR M. JOSEPH SACCHI (DE MILAN).

Soient

$$y = \varphi(x), \quad y = \psi(x)$$

les équations de deux courbes AN, BN rapportées à des axes orthogonaux OX, OY; $f(\alpha, \beta) = 0$ une relation donnée entre les abscisses α, β de deux points A, B des mêmes courbes; n l'abscisse du point N. En supposant que le point A se meuve sur la courbe AN, il en sera de même de B et de la droite AB, laquelle sera tangente à une ligne enveloppe en un point M qu'on veut déterminer.

En posant

$$\frac{d\varphi}{d\alpha} = \varphi'_{(\alpha)}, \quad \frac{d\psi}{d\beta} = \psi'_{(\beta)}, \dots,$$

et en prenant les dérivées par rapport à α des deux équations suivantes

$$(y - \varphi_{(\alpha)}) (\beta - \alpha) = (x - \alpha) (\psi_{(\beta)} - \varphi_{(\alpha)}), \quad f(\alpha, \beta) = 0,$$

dont la première représente la droite AB, on a

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} [y - \varphi_{(\alpha)} - (x - \alpha) \psi'_{(\beta)}] \delta' = y - \psi_{(\beta)} - (x - \beta) \varphi'_{(\alpha)} \\ \text{et} \quad f'_{(\alpha)} + f'_{(\beta)} \delta' = 0. \end{array} \right.$$

En éliminant de ces quatre équations α , β , δ' , on aurait l'équation de la courbe enveloppe.

Que l'on nomme t la tangente de l'angle que AB fait avec OX, et que l'on suppose M placé entre A et B, on aura

$$y - \varphi_{(\alpha)} = t(x - \alpha), \quad y - \psi_{(\beta)} = t(x - \beta), \quad \frac{x - \alpha}{\beta - x} = \frac{MA}{MB}.$$

Au moyen de ces équations, éliminant des équations (1) les quantités

$$\delta', \quad y - \varphi_{(\alpha)}, \quad y - \psi_{(\beta)}, \quad x - \alpha,$$

on obtient

$$(2) \quad MA \left(\frac{\psi'_{(\beta)} - t}{f'_{(\beta)}} \right) = MB \left(\frac{\varphi'_{(\alpha)} - t}{f'_{(\alpha)}} \right);$$

cette dernière détermine, dans des cas particuliers, la position du point M sur la droite AB, comme on va le voir dans les applications suivantes.

Applications. — I. Supposons que la droite AB se meuve de manière que la longueur de l'arc ANB soit constante et égale à h .

En faisant

$$\sqrt{1 + q'^2_{(x)}} = p'_{(x)}, \quad \sqrt{1 + \psi'^2_{(x)}} = q'_{(x)},$$

on aura

$$f(x, \beta) = p_{(n)} - p_{(\alpha)} + q_{(\beta)} - q_{(n)} = h;$$

d'où l'on tire

$$f'_{(\alpha)} = -p'_{(\alpha)} = -\sqrt{1 + \varphi'^2_{(\alpha)}},$$

et

$$f'_{(\xi)} = q'_{(\xi)} = \sqrt{1 + \psi'_{(\xi)}{}^2}.$$

En substituant à $f'_{(\alpha)}$, $f'_{(\xi)}$, ces valeurs dans l'équation (2), et divisant par $\sqrt{1 + t^2}$, on a

$$\text{MA} \left(\frac{\psi'_{(\xi)} - t}{\sqrt{1 + t^2} \sqrt{1 + \psi'_{(\xi)}{}^2}} \right) = \text{MB} \left(\frac{t - \varphi'_{(\alpha)}}{\sqrt{1 + t^2} \sqrt{1 + \varphi'_{(\alpha)}{}^2}} \right).$$

Si l'on conduit AT, BT, tangentes aux deux courbes aux points A et B, et les droites BV, AV, respectivement parallèles à ces tangentes, la dernière équation pourra être remplacée par la suivante

$$\text{MA} \sin \text{TBA} = \text{MB} \sin \text{TAB},$$

ou bien

$$\frac{\text{MA}}{\text{MB}} = \frac{\text{TB}}{\text{TA}} = \frac{\text{VA}}{\text{VB}},$$

d'où l'on conclut que le point M est déterminé par la bissectrice VM de l'angle AVB.

II. Soit constante et égale à a l'aire du triangle mixtiligne ANB.

Si l'on pose

$$\varphi_{(x)} = p'_{(x)}, \quad \psi_{(x)} = q'_{(x)},$$

on aura l'équation

$$f(z, \xi) = p_{(n)} - p_{(\alpha)} + q_{(\xi)} - q_{(n)} - \frac{1}{2} (\xi - \alpha) (\varphi_{(\alpha)} + \psi_{(\xi)}) - a,$$

laquelle, en observant que $\psi_{(\xi)} - \varphi_{(\alpha)} = t (\xi - \alpha)$, donne

$$f'_{(\alpha)} = \frac{1}{2} (\alpha - \xi) (\varphi'_{(\alpha)} - t) \quad \text{et} \quad f'_{(\xi)} = \frac{1}{2} (\alpha - \xi) (\psi'_{(\xi)} - t).$$

Par conséquent, de l'équation (2) on déduit $\text{MA} = \text{MB}$, c'est-à-dire que le point M est le milieu de AB.

III. Soit constante et égale à b la longueur de la corde

AB, on aura

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta) &= (\psi_{(\beta)} - \varphi_{(\alpha)})^2 + (\beta - \alpha)^2 - b^2, \\ f'_{(\alpha)} &= -2(\beta - \alpha)(1 + t\varphi'_{(\alpha)}), \\ f'_{(\beta)} &= 2(\beta - \alpha)(1 + t\psi'_{(\beta)}); \end{aligned}$$

ces valeurs changent l'équation (2) en la suivante

$$MA \left(\frac{\psi'_{(\beta)} - t}{1 + t\psi'_{(\beta)}} \right) = MB \left(\frac{t - \varphi'_{(\alpha)}}{1 + t\varphi'_{(\alpha)}} \right),$$

qui est équivalente à

$$(3) \quad MA \operatorname{tang} TBA = MB \operatorname{tang} TAB;$$

d'où, en désignant par P le point de rencontre des deux normales aux courbes en A et B, on a

$$MA \operatorname{tang} PAB = MB \operatorname{tang} PBA;$$

cette dernière égalité montre que le point M est la projection de P sur AB.

Si la projection de T sur AB est R, on aura

$$RB \operatorname{tang} TBA = RA \operatorname{tang} TAB,$$

et delà, en ayant égard à l'égalité (3),

$$MA = RB, \quad MB = RA,$$

relations qui démontrent la propriété énoncée par M. Böklen, dans la question (616) page 156 de ce journal (*), relative au cas où la droite constante AB se meut de manière que ses deux extrémités A, B restent sur deux droites fixes TA, TB.

(*) Dans cette question où l'on dit que : *la projection orthogonale de O est aussi éloignée de M...*, il faut lire : *la projection orthogonale de N sur MO est aussi éloignée de O...*

Observation. — Les règles données pour déterminer le point M sur AB subsistent évidemment quelle que soit la ligne ANB, composée d'un nombre *quelconque* d'arcs de courbes différentes, puisqu'elles ne dépendent que des points A, B qui ne peuvent appartenir qu'à deux courbes ou à une seule.
