NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ABEL TRANSON

Sur les polygones semi-réguliers inscrits à l'ellipse

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 2 (1863), p. 317-320

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__317_1>

SUR LES POLYGONES SEMI-RÉGULIERS INSCRITS A L'ELLIPSE;

PAR M. ABEL TRANSON.

J'appelle *polygone semi-régulier inscrit à l'ellipse* un polygone tel, que les triangles, ayant les différents côtés pour leurs bases avec leurs sommets au centre de la courbe, sont équivalents. Ainsi, un tel polygone est toujours la projection d'un polygone régulier circulaire; mais, tandis que dans le cercle un polygone régulier est complétement déterminé de forme par le nombre de ses côtés, il est évident que la forme du polygone semi-régulier elliptique dépend à la fois du nombre de ses côtés et en même temps de sa situation sur le plan de la courbe. Toutefois les polygones d'un même nombre de côtés inscrits dans une même ellipse jouissent d'une propriété commune dont voici l'énoncé :

THÉORÈME. *Soient* R_1, R_2, R_3,..., R_n *les rayons de courbure de l'ellipse aux différents sommets d'un poly-*

gone semi-régulier; la moyenne arithmétique des quantités $(R_1)^{\frac{2}{3}}$, $(R_2)^{\frac{2}{3}}, \ldots,$ $(R_n)^{\frac{2}{3}}$ *est indépendante de la situation particulière du polygone.*

Pour la démonstration de ce théorème, il convient d'employer comme variable indépendante l'angle qui reçoit, dans la théorie du mouvement elliptique des planètes, le nom d'*anomalie excentrique*. Si on le représente par u, les coordonnées d'un point de l'ellipse sont exprimées par

$$x = a\cos u, \quad y = b\sin u;$$

et par suite le rayon de courbure dont la valeur est

$$R = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$$

prend la forme

$$R = \frac{(a^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

Or, d'après la signification géométrique de l'anomalie excentrique, les valeurs de u qui répondent aux sommets d'un polygone semi-régulier de n côtés croissent selon une progression arithmétique dont la raison est $\frac{2\pi}{n}$. Donc, si u est l'anomalie qui correspond à un premier sommet et $u+x$ celle qui se rapporte à un autre sommet quelconque, on a pour x une des n valeurs de $\frac{2m\pi}{n}$, où m est un des nombres entiers depuis 1 jusqu'à n. De plus, en vertu de la formule précédente, on a

$$(abR_x)^{\frac{2}{3}} = a^2\sin^2(u+x) + b^2\cos^2(u+x),$$

ou bien

$$(ab\,\mathrm{R}_x)^{\frac{2}{3}} = a^2\cos^2 u + b^2\sin^2 u + (a^2 - b^2)(\sin^2 u - \cos^2 u)\cos^2 x$$
$$+ \frac{a^2 - b^2}{2}\sin 2u \,.\, \sin 2x.$$

Pour calculer la somme des n valeurs du premier membre, il faut connaître la somme des valeurs de $\cos^2 x$ et celle des valeurs de $\sin^2 x$. Or, comme on a

$$nx = 2m\pi,$$

c'est-à-dire

$$\cos nx = 1,$$

on a donc aussi

$$1 = \cos^n x - \frac{n\,.\,n-1}{1\,.\,2}\cos^{n-2} x\sin^2 x$$
$$+ \frac{n\,.\,n-1\,.\,n-2\;n-3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\cos^{n-1} x\sin^{n-4} x - \ldots;$$

car le second membre est l'expression connue de $\cos nx$. Si l'on y remplace $\sin^2 x$ par $1 - \cos^2 x$ et qu'on ordonne par rapport aux puissances de $\cos x$, en ne retenant que les deux premiers termes, il viendra

$$2^{n-1}\cos^n x - n\,.\,2^{n-3}\cos^{n-2} x + \ldots = 0;$$

d'après quoi il est aisé de voir que $\Sigma\cos^2 x$ est égal à $\frac{n}{2}$. Quant à $\Sigma\sin 2x$, il est manifestement nul. D'après cela, on trouvera aisément

$$(ab)^{\frac{2}{3}}\sum_1^n(\mathrm{R}_x)^{\frac{2}{3}} = \frac{n}{2}(a^2 + b^2),$$

et par suite

$$\frac{1}{n}\sum_1^n(\mathrm{R}_x)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\right].$$

C'est précisément ce qu'il fallait démontrer; mais il se trouve établi en outre que *la moyenne arithmétique des quantités* $(R_x)^{\frac{2}{3}}$ *est indépendante aussi du nombre des côtés du polygone semi-régulier.*