

A. CORNU

Caustiques. Centre de jonction

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 311-317

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__311_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CAUSTIQUES. — CENTRE DE JONCTION;

PAR M. A. CORNU,
Elève-Ingénieur des Mines.

Depuis l'ingénieuse méthode de M. Quételet, le problème des caustiques est théoriquement ramené à une question plus simple, puisqu'on obtient immédiatement une développante de la caustique : mais la difficulté inhérente à la construction par points d'une développée subsiste toujours. C'est la détermination dans le cas général du point de contact du rayon lumineux avec son enveloppe ou la construction par points d'une caustique qui va faire l'objet de cette Note.

Beaucoup de solutions ont été déjà données sur ce problème. Celle qui suit s'appuie sur la considération d'un point (centre de jonction) dont les propriétés n'ont peut-être pas été remarquées, et qui, en tout cas, méritent quelque attention.

La formule bien connue

$$(1) \quad \frac{1}{\rho} (\cos i - n \cos r) = \frac{\cos^2 i}{a} - \frac{n \cos^2 r}{b},$$

et facile à démontrer géométriquement par des constructions infinitésimales, permet de calculer la distance b du point de la caustique comptée à partir du point d'incidence, en fonction :

1° De la distance a du point lumineux au point d'incidence ;

2° Du rayon de courbure ρ de la courbe dirimante ;

3° Des angles d'incidence et de réfraction i, r ;

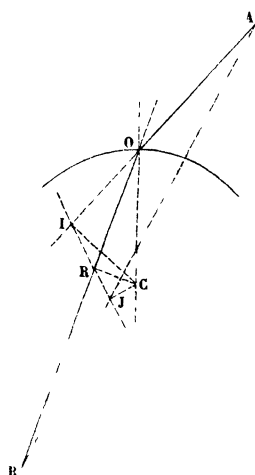
4° De l'indice de réfraction $n = \frac{\sin i}{\sin r}$.

Nous allons en déduire le théorème suivant.

Considérons dans le plan d'une courbe dirimante un point lumineux, un rayon qui en émane et le rayon réfracté correspondant : si le point lumineux se meut sur le rayon incident, le point de la caustique qui lui correspond sur le rayon réfracté se déplace de telle sorte que la droite qui les joint passe par un point fixe.

Ce point, que nous nommerons *centre de jonction*, est le pied de la perpendiculaire abaissée du centre de courbure au point d'incidence sur la droite qui joint les pieds des perpendiculaires abaissées du même point sur les rayons incident et réfracté.

Joignons le point lumineux A au point correspondant



de la caustique B : soient $OA = a$, $OB = b$. Cette droite, rapportée aux deux axes OA, OB, aura pour équation

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

dont les paramètres $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ sont liés par la formule (1).

- Comme ces paramètres entrent linéairement dans les deux équations, la droite AB passe par un point fixe.

En effet, éliminons l'un des deux paramètres, par exemple $\frac{1}{b}$, entre les équations précédentes; pour cela, additionnons-les membre à membre après avoir multiplié la première par γ et la seconde par $-n \cos^2 r$: il vient

$$\frac{\gamma}{\rho}(\cos i - n \cos r) - \frac{nx \cos^2 r}{a} = \frac{\gamma \cos^2 i}{a} - n \cos^2 r,$$

ou bien

$$\frac{\gamma}{\rho}(\cos i - n \cos r) + n \cos^2 r = \frac{1}{a}(x \cdot n \cos^2 r + \gamma \cos^2 i),$$

équation satisfaite indépendamment de $\frac{1}{a}$ si l'on pose

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{\rho}(\cos i - n \cos r) + n \cos^2 r &= 0, \\ xn \cos^2 r + \gamma \cos^2 i &= 0. \end{aligned}$$

La droite représentée par l'équation (2) passe donc toujours par le point d'intersection des droites représentées par les deux dernières équations. Substituant à n sa valeur $\frac{\sin i}{\sin r}$ et résolvant par rapport à x et à γ , nous obtiendrons les coordonnées de ce point fixe que nous appellerons *centre de jonction*

$$(3) \quad x = -\rho \frac{\sin r \cos^2 i}{\sin(i-r)},$$

$$(4) \quad \gamma = +\rho \frac{\sin i \cdot \cos^2 r}{\sin(i-r)}.$$

Toute combinaison de ces deux valeurs donnera une droite passant par le centre de jonction.

1° Divisons l'équation (3) par $\rho \cos i$, l'équation (4) par $\rho \cos r$, et ajoutons l'équation (3) à l'équation (4), il vient

$$(5) \quad \frac{y}{\rho \cos r} + \frac{x}{\rho \cos i} = 1;$$

$\rho \cos r$ et $\rho \cos i$ sont les distances à l'origine des pieds des perpendiculaires abaissées du centre de courbure sur les axes. Le centre de jonction se trouve donc sur la droite qui joint les pieds des perpendiculaires abaissées du centre de courbure sur les deux rayons.

2° Multiplions l'équation (3) par $\sin r$, l'équation (4) par $\sin i$, et ajoutons l'équation (3) à l'équation (4), il vient, après simplifications,

$$y \sin i + x \sin r = \frac{\cos^2 r - \cos^2 i}{\sin(i - r)},$$

équation vérifiée par les coordonnées du centre de courbure

$$x_1 = -\frac{\rho \sin r}{\sin(i - r)}, \quad y_1 = \frac{\rho \sin i}{\sin(i - r)}.$$

De plus, la droite représentée par cette équation est perpendiculaire à la droite (5), car les coefficients angulaires

$$m = -\frac{\cos r}{\cos i}, \quad m' = -\frac{\sin r}{\sin i},$$

satisfont à la relation de perpendicularité dans le cas des axes obliques

$$1 + mm' + (m + m') \cos \theta = 0.$$

Ici $\theta = (i - r)$.

Donc, pour construire le centre de jonction, on abaissera du centre de courbure trois perpendiculaires :

- 1° Sur le rayon incident;
- 2° Sur le rayon réfracté;

3° Sur la droite qui joint les pieds de ces deux perpendiculaires. Le pied de la troisième perpendiculaire sera le centre de jonction.

Dans le cas des caustiques par réflexion, la construction se simplifie, parce que $r = -i$.

APPLICATIONS.

CONSTRUCTION DIRECTE. — 1° *Construire par points la caustique par réfraction d'un cercle.* — Comme cette caustique est la développée d'un ovale de Descartes, on obtient ainsi le centre de courbure de cette ligne. (*Voir Salmon, Higher plane Curves.*)

2° *Caustique d'une droite par réfraction.* — C'est une conique. Dans ce cas le centre de jonction est à l'infini comme le centre de courbure de la droite; mais on reconnaît aisément qu'en faisant varier le rayon de courbure d'une ligne dirimante quelconque, le centre de jonction décrit une droite passant au point d'incidence; on construit un second point de cette droite, et c'est par une parallèle menée par le point lumineux qu'on détermine la caustique.

3° *Caustique par réflexion d'un cercle.* — Développée d'un limaçon de Pascal. Même conclusion relativement à la construction du centre de courbure de cette ligne.

CONSTRUCTION INVERSE. — Étant connue la caustique, déterminer la courbure de la ligne dirimante.

1° Déterminer le centre de courbure des coniques en considérant un foyer comme la caustique par réflexion de l'autre foyer.

2° Même problème pour l'ovale de Descartes. Solution très-simple.

En général, on construira donc les développées des lignes dont la définition se ramènera à celle d'une déve-

loppante de caustique ou dont une caustique particulière sera connue.

Pour compléter l'étude du centre de jonction, nous indiquerons sommairement quelques lieux géométriques que décrit ce point dans différentes circonstances.

Caustiques planes : lieu des positions du centre de jonction quand varie l'un des trois éléments, courbure, indice, incidence.

1° Quand la courbure varie au point d'incidence, nous avons dit que le lieu est une droite; de cette propriété on déduit la construction de la caustique quand le rayon de courbure à l'incidence est infini

2° Quand l'indice varie, le lieu est évidemment un cercle; car le rayon AO restant fixe et le rayon incident tournant autour du point d'incidence O, la droite IR qui joint le pied des perpendiculaires abaissées du centre de courbure tourne autour du point fixe I, et le centre de jonction J est le sommet d'un angle droit mobile dont les côtés passent respectivement par des points fixes I, C.

3° Quand l'indice varie, le lieu n'est plus aussi connu, c'est cependant une courbe très-intéressante, dont on construit assez simplement la normale et même la développée. Elle est du sixième degré; mais son équation en coordonnées polaires s'obtient sans difficulté en prenant pour axe polaire la normale au point d'incidence, et pour pôle le centre de courbure

$$R = \rho \ n \ \frac{\sin^2 \omega}{n^2 + 2n \cos \omega + 1}.$$

La courbe ressemble à un système de deux ellipses tangentes à l'axe polaire au point origine; l'aire d'une de ses boucles a pour valeur $\frac{3}{16} \pi \left(\frac{\rho}{n} \right)^2$.

On peut étendre ces considérations aux surfaces diri-

mantes ; mais il n'y a pas de généralisation immédiate, parce qu'on est toujours ramené aux courbes planes, le rayon réfracté étant dans le plan d'incidence.

Le seul point à examiner est le lieu que décrit le centre de jonction quand le rayon incident décrit un cône de révolution autour de la normale. C'est une courbe gauche, intersection de deux cylindres du second degré, ayant des relations très-simples avec les plans principaux et avec l'indicatrice au point d'incidence.

Nous nous bornerons à ces indications, que le lecteur complétera facilement si ce genre de recherches lui présente de l'utilité ou de l'intérêt.
