

H. PICQUET

Solution de la question 641 (Catalan)

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 275-276

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__275_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 641 (CATALAN)

(voir p. 98);

PAR M. H. PICQUET,

Elève de mathématiques spéciales au lycée de Poitiers.

Il s'agit de démontrer la relation

$$\begin{aligned} & \cos(a+b+c) \cos(a+b-c) \cos(a+c-b) \cos(b+c-a) \\ &= 4 \cos^2 a \cos^2 b \cos^2 c - (\cos a + \cos b + \cos c)(\cos a + \cos b - \cos c) \\ & \quad \times (\cos a + \cos c - \cos b)(\cos b + \cos c - \cos a). \end{aligned}$$

Le second membre peut s'écrire

$$\begin{aligned} & 4 \cos^2 a \cos^2 b \cos^2 c \\ & - [(\cos a + \cos b)^2 - \cos^2 c][\cos^2 c - (\cos a - \cos b)^2], \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & 4 \cos^2 a \cos^2 b \cos^2 c \\ & + (\cos^2 a - \cos^2 b)^2 + \cos^4 c - 2 \cos^2 c (\cos^2 a + \cos^2 b), \end{aligned}$$

ou

$$(\cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c)^2 - 4 \cos^2 b \cos^2 c + 4 \cos^2 a \cos^2 b \cos^2 c.$$

Examinons maintenant le premier membre. En transformant en une somme de cosinus les deux premiers facteurs, ainsi que les deux derniers, il vient

$$\frac{1}{2} [\cos 2(a+b) + \cos 2c] \frac{1}{2} [\cos 2c + \cos 2(a-b)]$$

ou

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \left\{ \cos^2 2c + \cos 2(a+b) \cos 2(a-b) \right. \\ & \quad \left. + \cos 2c [\cos 2(a+b) + \cos 2(a-b)] \right\}. \end{aligned}$$

En remplaçant

$$\cos 2(a+b) \cos 2(a-b)$$

par

$$\frac{1}{2}(\cos 4a + \cos 4b)$$

ou par

$$\frac{1}{2}(2 \cos^2 2a - 1 + 2 \cos^2 2b - 1)$$

ou par

$$\cos^2 2a + \cos^2 2b - 1 \quad \text{et} \quad \cos 2c [\cos 2(a+b) + \cos 2(a-b)]$$

par

$$2 \cos 2a \cos 2b \cos 2c,$$

il vient

$$\frac{1}{4}(\cos^2 2a + \cos^2 2b + \cos^2 2c + 2 \cos 2a \cos 2b \cos 2c - 1).$$

A la place de $\cos 2a$, je mets $2 \cos^2 a - 1$, et les expressions analogues pour $\cos 2b$ et $\cos 2c$: il vient alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} [4 \cos^4 a + 4 \cos^2 a + 1 + 4 \cos^4 b - 4 \cos^2 b + 1 + 4 \cos^4 c - 4 \cos^2 c \\ + 1 + 2(2 \cos^2 a - 1)(2 \cos^2 b - 1)(2 \cos^2 c - 1) - 1]. \end{aligned}$$

Toute réduction faite, il reste

$$\begin{aligned} \cos^4 a + \cos^4 b + \cos^4 c - 2 \cos^2 a \cos^2 b - 2 \cos^2 a \cos^2 c \\ - 2 \cos^2 b \cos^2 c + 4 \cos^2 a \cos^2 b \cos^2 c, \end{aligned}$$

ou

$$(\cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c)^2 - 4 \cos^2 b \cos^2 c + 4 \cos^2 a \cos^2 b \cos^2 c,$$

qui est précisément la valeur à laquelle j'étais arrivé pour le second membre.