

FORTUNATO PADULA

Seconde solution de la question 287

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 212-220

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__212_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 287

(voir t. XIII, p. 191, et t. XVII, p. 354) ;

PAR M. FORTUNATO PADULA,
Professeur à Naples.

Si l'on divise un polyèdre homogène en tétraèdres au moyen de droites menées d'un point quelconque M aux sommets du polyèdre, et si l'on suppose la masse de chaque tétraèdre réunie au centre de la sphère circonscrite à ce tétraèdre, le centre de gravité de ce système de points matériels est toujours le même, quel que soit le point M .
(BELLAVITIS.)

Soit $A_1 A_2 \dots A_n$ une des faces du polyèdre donné P ; par le point A_1 supposons que l'on tire les diagonales $A_1 A_3, A_1 A_4, \dots, A_1 A_{n-1}$: $MA_1 A_{r-1} A_r$ sera un des tétraèdres dans lesquels on aura décomposé le polyèdre donné : soit C_ω le centre de la sphère circonscrite à ce tétraèdre, et Ox, Oy, Oz trois axes orthogonaux. On

nommera :

$$\begin{array}{c}
 \left. \begin{array}{l}
 \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \\
 \dots\dots\dots \\
 \alpha_r, \beta_r, \gamma_r \\
 x_\omega, y_\omega, z_\omega \\
 s, t, u
 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{les coordonnées des points} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} A_1 \\ \dots \\ A_r \\ C_\omega \\ M
 \end{array} \right. \\
 \\
 \left. \begin{array}{l}
 d' \\
 \dots \\
 d_r \\
 n
 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{les distances} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} OA_1 \\ \dots \\ OA_r \\ OM
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

v_ω le volume du tétraèdre $MA_1A_{r-1}A_r\dots$

Les coordonnées $x_\omega, y_\omega, z_\omega$ seront déterminées, comme l'on sait, par les équations

$$(\alpha_1 - s)x_\omega + (\beta_1 - t)y_\omega + (\gamma_1 - u)z_\omega = \frac{1}{2}(d_1^2 - n^2),$$

$$(\alpha_{r-1} - s)x_\omega + (\beta_{r-1} - t)y_\omega + (\gamma_{r-1} - u)z_\omega = \frac{1}{2}(d_{r-1}^2 - n^2),$$

$$(\alpha_r - s)x_\omega + (\beta_r - t)y_\omega + (\gamma_r - u)z_\omega = \frac{1}{2}(d_r^2 - n^2),$$

et en faisant

$$\Delta_\omega = \begin{vmatrix} \alpha_1 - s & \beta_1 - t & \gamma_1 - u \\ \alpha_{r-1} - s & \beta_{r-1} - t & \gamma_{r-1} - u \\ \alpha_r - s & \beta_r - t & \gamma_r - u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & s & t & u \\ 1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 1 & \alpha_{r-1} & \beta_{r-1} & \gamma_{r-1} \\ 1 & \alpha_r & \beta_r & \gamma_r \end{vmatrix}$$

$$\Delta'_\omega = \begin{vmatrix} d_1^2 - n^2 & \beta_1 - t & \gamma_1 - u \\ d_{r-1}^2 - n^2 & \beta_{r-1} - t & \gamma_{r-1} - u \\ d_r^2 - n^2 & \beta_r - t & \gamma_r - u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & n^2 & t & u \\ 1 & d_1^2 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 1 & d_{r-1}^2 & \beta_{r-1} & \gamma_{r-1} \\ 1 & d_r^2 & \beta_r & \gamma_r \end{vmatrix}$$

$$\Delta''_{\omega} = \begin{vmatrix} a_1 - s & d_1^2 - n^2 & \gamma_1 - u \\ \alpha_{r-1} - s & d_{r-1}^2 - n^2 & \gamma_{r-1} - u \\ \alpha_r - s & d_r^2 - n^2 & \gamma_r - u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & s & n^2 & u \\ 1 & \alpha_1 & d_1^2 & \gamma_1 \\ 1 & \alpha_{r-1} & d_{r-1}^2 & \gamma_{r-1} \\ 1 & \alpha_r & d_r^2 & \gamma_r \end{vmatrix}$$

$$\Delta'''_{\omega} = \begin{vmatrix} \alpha_1 - s & \beta_1 - t & d_1^2 - n^2 \\ \alpha_{r-1} - s & \beta_{r-1} - t & d_{r-1}^2 - n^2 \\ \alpha_r - s & \beta_r - t & d_r^2 - n^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & s & t & n^2 \\ 1 & \alpha_1 & \beta_1 & d_1^2 \\ 1 & \alpha_{r-1} & \beta_{r-1} & d_{r-1}^2 \\ 1 & \alpha_r & \beta_r & d_r^2 \end{vmatrix}$$

on obtiendra

$$x_{\omega} = \frac{\Delta'_{\omega}}{2\Delta_{\omega}}, \quad y_{\omega} = \frac{\Delta''_{\omega}}{2\Delta_{\omega}}, \quad z_{\omega} = \frac{\Delta'''_{\omega}}{2\Delta_{\omega}},$$

où le déterminant $\Delta_{\omega} = 6\nu_{\omega}$. D'ailleurs, si, par tous les sommets A_1, A_2 , etc., du polyèdre donné, on mène des parallèles à l'axe Ox , sur lesquelles, à partir du plan yz , on porte des distances proportionnelles respectivement à d_1^2, d_2^2 , etc. (c'est-à-dire, en faisant $d_{\omega}^2 = m\delta_{\omega}$, égales à δ_1, δ_2 , etc.), on aura des points A'_1, A'_2 , etc., que l'on peut prendre pour sommets d'un nouveau polyèdre P' , dont les faces seront déterminées par les triangles $A'_1 A'_{r-1} A'_r$, correspondants aux triangles dans lesquels on aura décomposé les faces du polyèdre donné. Soit M' le point que l'on obtient de M par la même construction, ou bien, faisant $n^2 = m\nu$, le point (ν, t, u) ; nommons ν'_{ω} le volume du tétraèdre $M' A'_1 A'_{r-1} A'_r$, et l'on aura

$$\Delta'_{\omega} = \begin{vmatrix} 1 & m\nu & t & u \\ 1 & m\delta_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 1 & m\delta_{r-1} & \beta_{r-1} & \gamma_{r-1} \\ 1 & m\delta_r & \beta_r & \gamma_r \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} 1 & \nu & t & u \\ 1 & \delta_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 1 & \delta_{r-1} & \beta_{r-1} & \gamma_{r-1} \\ 1 & \delta_r & \beta_r & \gamma_r \end{vmatrix} = 6m\nu'_{\omega},$$

et par conséquent

$$x_{\omega} = \frac{m}{2} \cdot \frac{\nu'_{\omega}}{\nu_{\omega}}.$$

Mais X étant l' x du centre de gravité des masses réunies aux points C_ω , on a

$$X = \frac{\sum \nu_\omega x_\omega}{\sum \nu_\omega},$$

donc on obtiendra

$$(1) \quad X = \frac{m}{2} \cdot \frac{\sum \nu'_\omega}{\sum \nu_\omega} = \frac{m V'}{2 V},$$

où V, V' sont les volumes des polyèdres P et P' .

Pareillement, si l'on forme deux autres polyèdres P'' et P''' par des constructions analogues à celle indiquée pour le polyèdre P' , on aura

$$(2) \quad Y = \frac{m V''}{2 V},$$

$$(3) \quad Z = \frac{m V'''}{2 V};$$

mais les volumes V', V'', V''' des polyèdres P', P'', P''' ne dépendent nullement de la position du point M .
Donc, etc.

Remarques.

1. Dans la formation des déterminants Δ_ω , il est nécessaire de disposer les éléments de manière qu'il en résulte pour Δ une valeur positive ou négative selon que ν_ω entre positivement ou négativement dans la composition du volume total V . La disposition des éléments des déterminants $\Delta'_\omega, \Delta''_\omega, \Delta'''_\omega$ doit être réglée d'après celle des éléments correspondants de Δ_ω . Et enfin pour chaque volume ν_ω que l'on doit regarder comme négatif dans la composition de V , il faut substituer au lieu du poids de la masse ν_ω une force verticale négative appliquée au centre C_ω et proportionnelle à ν_ω .

2. Les points $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$ ne sont pas en général

dans un même plan, quoique les points $A_1, A_2, \dots, A_n$ soient les sommets d'une même face du polyèdre donné : donc, lorsqu'on divise le polyèdre P en tétraèdres, on peut prendre le point M d'une manière quelconque, mais il faut décomposer chaque face toujours dans les mêmes triangles, sans quoi les volumes V', V'', V''' ne resteraient pas constants, parce que les polyèdres P', P'', P''' eux-mêmes changeraient, et en conséquence le point (X, Y, Z) , pourvu que l'on y considère des couples comme il sera dit dans le n° 6 pour un cas plus général.

3. Si le polygone $A_1 A_2 \dots A_n$ est inscriptible dans un cercle, on peut démontrer que les points $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$, seront dans un même plan. Dans ce cas on peut diviser la face $A_1 A_2 \dots A_n$ en triangles d'une manière quelconque, parce que la pyramide $M'A'_1 A'_2 \dots A'_n$ du polyèdre P' , correspondante à la pyramide $MA_1 A_2 \dots A_n$ dans le polyèdre P , restera toujours la même.

4. Si le polyèdre P est inscriptible dans une sphère, on peut fixer à son centre l'origine des coordonnées, et l'on aura $d_1 = d_2 = d_3 = \dots$; donc tous les sommets du polyèdre P' seront dans un même plan parallèle au plan yz , et par conséquent $V' = 0$; on aura de même $V'' = 0$, $V''' = 0$. Dans ce cas, le centre de gravité du système de points indiqués dans la question est le centre de la sphère circonscrite au polyèdre.

5. Si, au lieu de diviser le polyèdre en tétraèdres ayant tous le même sommet, on le divise d'une manière quelconque, il est évident que le théorème a toujours lieu, pourvu que les tétraèdres qui aboutissent aux faces du polyèdre donné aient toujours pour bases les mêmes triangles dans lesquels on aura décomposé chaque face du polyèdre. La démonstration reste la même, parce que $\nu_\epsilon, \nu'_\epsilon$ étant les volumes de deux tétraèdres correspondants quelconques dans les polyèdres P, P' , on aura de

même

$$X = \frac{m \sum v'_\varepsilon}{2 \sum v'_\varepsilon} = \frac{m V'}{2 V}.$$

6. Pour diviser chaque face du polyèdre en triangles, on pourrait prendre dans le plan de la face $A_1 A_2 \dots A_n$, que l'on considère, un point N, et former les triangles $NA_1 A_2$, $NA_2 A_3, \dots, NA_n A_1$, alors on aura le même théorème et le même point (X, Y, Z) pourvu que l'on regarde le point N comme sommet de $n - 2$ tétraèdres $NA_1 A_2 A_3$, $NA_1 A_3 A_4, \dots, NA_1 A_{n-1} A_n$ de volume nul. Dans ce cas, pour chaque tétraèdre $NA_1 A_{r-1} A_r$, on aura pour centre de la sphère circonscrite un point C_{r-2} situé à l'infini sur la perpendiculaire à la face $A_1 A_2 \dots A_n$ élevée par le centre du cercle circonscrit au triangle $A_1 A_{r-1} A_r$, et le poids que l'on doit appliquer à ce point C_{r-2} est nul. Ce poids doit être remplacé, comme on déduit des équations trouvées ci-dessus, par un couple. En effet, la position des points C étant indépendante des axes des coordonnées, supposons que l'origine soit au centre du cercle $A_1 A_{r-1} A_r$ circonscrit au triangle $A_1 A_{r-1} A_r$, et son plan celui des xy . Soit N la projection du point M sur la face $A_1 A_2 \dots A_n$ ou bien sur le plan xy . Nommons k_{r-2} la *puissance* du point N par rapport au cercle $A_1 A_{r-1} A_r$: on aura, quel que soit le point M_1 ,

$$r_\omega = 0, \quad y_\omega = 0, \quad z_\omega = \frac{\Delta''_\omega}{2 \Delta_\omega} = \frac{\Delta'''_\omega}{12 v_\omega}, \quad v_\omega z_\omega = \frac{1}{12} \Delta'''_\omega;$$

mais à cause de

$$\gamma_i = \gamma_{r-1} = \gamma_r = 0, \quad d_i = d_{r-1} = d_r,$$

on a

$$\Delta_\omega = -u \begin{vmatrix} 1 & \alpha_i & \beta_i \\ 1 & \alpha_{r-1} & \beta_{r-1} \\ 1 & \alpha_r & \beta_r \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{\omega}'' = d_1^2 \begin{vmatrix} 1 & s & t & \frac{n^2}{d_1^2} \\ 1 & \alpha_1 & \beta_1 & 1 \\ 1 & \alpha_{r-1} & \beta_{r-1} & 1 \\ 1 & \alpha_r & \beta_r & 1 \end{vmatrix} = d_1^2 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 1 \\ \alpha_{r-1} & \beta_{r-1} & 1 \\ \alpha_r & \beta_r & 1 \end{vmatrix} - n^2 \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 1 & \alpha_{r-1} & \beta_{r-1} \\ 1 & \alpha_r & \beta_r \end{vmatrix}$$

$$= (d_1^2 - n^2) \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 1 & \alpha_{r-1} & \beta_{r-1} \\ 1 & \alpha_r & \beta_r \end{vmatrix} = -(u^2 + k_{r-2}) \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ 1 & \alpha_{r-1} & \beta_{r-1} \\ 1 & \alpha_r & \beta_r \end{vmatrix},$$

donc on obtiendra

$$z_{\omega} = \frac{1}{2} \left(u + \frac{k_{r-2}}{u} \right), \quad v_{\omega} z_{\omega} = \frac{1}{6} A_1 A_{r-1} A_r (u^2 + k_{r-2}).$$

Lorsque le point M coïncide avec le point N, on a

$$u = 0, \quad v_{\omega} = 0, \quad z_{\omega} = \infty;$$

mais

$$v_{\omega} z_{\omega} = \frac{1}{6} A_1 A_{r-1} A_r \cdot k_{r-2};$$

donc, si sur la perpendiculaire élevée sur la face $A_1 A_2 \dots A_n$, du côté extérieur, on porte une droite quelconque a , il y aura aux extrémités de cette droite un couple $\left(\frac{A_1 A_{r-1} A_r \cdot k_{r-2}}{6a}, -\frac{A_1 A_{r-1} A_r \cdot k_{r-2}}{6a} \right)$.

De même on déterminera les couples qu'on aura des autres tétraèdres de volume nul, et le centre de gravité de toutes les masses et des couples sera le point (X, Y, Z) déterminé par les équations (1), (2), (3).

Il faut observer que dans la formule $\frac{A_1 A_{r-1} A_r \cdot k_{r-2}}{6a}$ la puissance k_{r-2} est positive ou négative, selon que le point N est extérieur ou intérieur par rapport au cercle $A_1 A_{r-1} A_r$, et que l'aire du triangle $A_1 A_{r-1} A_r$ sera tou-

jours positive si le polygone $A_1 A_2 \dots A_n$ est convexe, et en général aura le même signe que dans l'équation

$$A_1 A_2 \dots A_n = \sum_3 A_1 A_{r-1} A_r.$$

Enfin, pourvu que la droite a reste parallèle à elle-même, on peut la fixer dans telle position qu'on voudra, et à ses extrémités agira toujours le même couple (*). Si le point N sur la circonférence du cercle $A_1 A_{r-1} A_r$ on aura $k_{r-2} > 0$, et par conséquent il n'y aura pas de couple à considérer.

7. Si l'on ne veut pas introduire les couples susdits, c'est-à-dire si l'on veut considérer seulement les tétraèdres effectifs dans lesquels on a divisé le polyèdre, alors le théorème aura lieu pour tous les systèmes de tétraèdres que l'on peut former sans changer la position des points N , quelle que soit d'ailleurs la manière de diviser le polyèdre en tétraèdres. Dans cette hypothèse, les polyèdres P' , P'' , P''' changeront de forme et de volume; ils dépendront de la position des points N dont les coordonnées doivent être introduites dans les formules trouvées: ainsi le polyèdre P' aura pour faces les triangles $N' A'_1 A'_2$, $N' A'_2 A'_3, \dots, N' A'_n A'_1$, etc., et son volume sera égal à

$$\Sigma \nu'_\omega = \frac{1}{6} \Sigma \Delta'_\omega,$$

où

$$\Delta'_\omega = \begin{vmatrix} 1 & n^2 & t & u \\ 1 & h^2 & b & c \\ 1 & d_{r-1}^2 & \beta_{r-1} & \gamma_{r-1} \\ 1 & d_r^2 & \beta_r & \gamma_r \end{vmatrix}.$$

(*) C'est une remarque à faire sur la théorie du centre d'un système de forces parallèles, que lorsqu'il y a un couple $(P, -P)$ appliqué à deux points M, N , si l'on mène une droite $M'N'$ égale et parallèle à la droite MN et dirigée dans le même sens, on peut transporter le couple $(P, -P)$ aux points M', N' sans changer la position du centre du système.

a, b, c étant les coordonnées du point N, et

$$h^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Dans ce cas, quand même le polyèdre P serait inscriptible dans une sphère, le centre de gravité du système des points C_ω qu'on obtiendra sera en général différent du centre de la sphère, à moins que tous les points N n'existent sur la sphère circonscrite au polyèdre, c'est-à-dire sur les sections respectives produites par ses faces dans la sphère.
