

EUGÈNE BELTRAMI

Solution de la question 637

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 181-184

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__181_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 637

PAR M. EUGÈNE BELTRAMI.

L'énoncé de la question est le suivant :

Les quatre faces d'un tétraèdre passent, chacune, par un point fixe; les trois côtés de l'une des quatre faces sont assujettis à rester, chacun, sur un plan fixe; trouver le lieu géométrique du sommet du tétraèdre opposé à cette face.

Ce lieu est, en général, une surface du troisième degré, qui se réduit à un cône du second degré quand les quatre points fixes sont situés sur un même plan.

R. SALMON.

Soient $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, les équations des trois plans fixes dans lesquels doivent se trouver les côtés de l'une des faces du tétraèdre; (x_0, y_0, z_0) le point par lequel doit toujours passer le plan de cette face; (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , (x_3, y_3, z_3) les trois autres points fixes. Nous désignerons ces quatre points par (0) , (1) , (2) , (3) , respectivement. Soient, enfin, u_1, v_2, w_3 ,

les valeurs de u, v, w correspondantes aux points (1), (2), (3), respectivement.

Cela posé, désignons par

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

l'équation du plan de la face qui passe par le point (0).

L'équation du plan de la face, passant par le point (1), sera de la forme

$$Ax + By + Cz + D + \lambda u = 0,$$

et comme cette dernière équation doit être satisfaite par les coordonnées du point (1), on aura

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D + \lambda u_1 = 0.$$

En éliminant λ entre ces deux équations, on trouve pour le plan de la face du tétraèdre, qui passe par le point (1), l'équation

$$A(ux_1 - u_1x) + B(uy_1 - u_1y) + C(uz_1 - u_1z) + D(u - u_1) = 0.$$

Les plans des deux autres faces, passant par les points (2) et (3), sont représentés par des équations analogues. En éliminant A, B, C, D entre ces trois équations et l'équation

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0,$$

on obtient pour le lieu cherché l'équation

$$(1) \quad \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ ux_1 - u_1x & uy_1 - u_1y & uz_1 - u_1z & u - u_1 \\ vx_2 - v_2x & vy_2 - v_2y & vz_2 - v_2z & v - v_2 \\ wx_3 - w_3x & wy_3 - w_3y & wz_3 - w_3z & w - w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

D'où l'on voit immédiatement que ce lieu est du troisième ordre.

On peut transformer l'équation précédente en celle-ci :

$$(2) \quad \begin{vmatrix} 1 & x & y & z & 1 \\ 0 & x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ u_1 & ux_1 & uy_1 & uz_1 & u \\ v_2 & vx_2 & vy_2 & vz_2 & v \\ w_3 & wx_3 & wy_3 & wz_3 & w \end{vmatrix} = 0$$

Puis, en posant

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & \alpha_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & \alpha_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & \alpha_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & \alpha_3 \end{vmatrix} \quad (\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1),$$

et en développant le déterminant (2) par rapport aux éléments de la première colonne, l'équation (2) se transforme en celle-ci :

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} uvw \Delta &= u_1 uv \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x & y & z & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \\ &+ v_2 uv \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x & y & z & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \\ &+ w_3 uv \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x & y & z & 1 \end{vmatrix} \end{aligned} \right.$$

Lorsque les quatre points (0), (1), (2), (3) sont dans un même plan, représenté par l'équation

$$p = ax + by + cz + d = 0,$$

(184)

on a, comme on sait, non-seulement $\Delta = 0$, mais aussi

$$\frac{d\Delta}{dx_i} : a = \frac{d\Delta}{dy_i} : b = \frac{d\Delta}{dz_i} : c = \frac{d\Delta}{d\alpha_i} : d = h_i \quad (i = 0, 1, 2, 3),$$

et l'équation (3) se réduit à

$$\left(h_1 \frac{u_1}{u} + h_2 \frac{v_2}{v} + h_3 \frac{w_3}{w} \right) p = 0.$$

Par suite le lieu se décompose dans le système formé par le plan

$$p = 0$$

et par la surface du second degré

$$h_1 \frac{u_1}{u} + h_2 \frac{v_2}{v} + h_3 \frac{w_3}{w} = 0.$$

Cette surface est évidemment un cône circonscrit au trièdre

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0.$$