

PAUL SERRET

Note sur un problème connu

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 2
(1863), p. 14-15

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1863_2_2__14_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1863, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR UN PROBLÈME CONNU ;

PAR M. PAUL SERRET.

Une corde AB d'une conique est vue, d'un point fixe O, sous un angle constant, trouver l'équation de son enveloppe.

Ce problème, résolu géométriquement dans le *Traité des Propriétés projectives*, n'a été étudié par l'analyse que dans le cas particulier de l'angle droit. Voici cependant, pour le cas général, une méthode très-simple, fondée sur la transformation des équations, et qui s'appliquerait avec la même facilité à une courbe de degré quelconque, ou à certaines questions analogues de la géométrie de l'espace.

Soient

$$(1) \quad f(x, y) = 0,$$

$$(2) \quad y = mx + n$$

les équations de la conique donnée et de la corde variable AB, rapportées à des axes rectangulaires quelconques ; et

$$(3) \quad \varphi(x) = 0$$

l'équation ayant pour racines les abscisses des extrémités de la corde. Il suffira, pour résoudre le problème, de trouver la relation qui doit exister entre les paramètres m et n , pour que les droites OA, OB, qui réunissent les extrémités de la corde au point O (x', y'), fassent entre elles l'angle donné.

Or, mettant l'équation (2) sous la forme

$$(2') \quad y - y' = m(x - x') - (y' - mx' - n),$$

divisant les deux membres par $x - x'$, et désignant par M le coefficient angulaire de l'une quelconque des droites OA ou OB , il vient

$$M = m - \frac{y' - mx' - n}{x - x'},$$

d'où

$$(4) \quad x = \frac{y' - Mx' - n}{m - M}.$$

C'est la relation existant entre l'abscisse de chacune des extrémités de la corde et le coefficient angulaire de la droite qui unit cette extrémité au point O . Et si l'on substitue à x sa valeur dans l'équation (3), l'équation transformée

$$(5) \quad \varphi \left(\frac{y' - Mx' - n}{m - M} \right) = 0$$

aura pour racines, en M , les coefficients angulaires des droites OA et OB . Il sera facile, dès lors, d'exprimer que les racines de cette équation sont liées par la relation

$$\frac{M' - M''}{1 + M'M''} = \text{const.};$$

et la relation entre m et n étant obtenue de la sorte, le problème s'achèvera par les moyens ordinaires.

Cette méthode s'applique à plusieurs problèmes analogues, et dont quelques-uns, abordés autrement, ne seraient pas sans difficulté.