

HOUSEL

Solution de la question 611

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 1
(1862), p. 67-69

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__67_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1862, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 611

(voir page 48);

PAR M. HOUSEL,
Professeur.

Trouver n nombres entiers et positifs dont la somme
égale le produit.

5.

Considérons d'abord le cas où ces nombres sont tous différents, et soit a le plus petit d'entre eux; les autres sont $a + \alpha_1, a + \alpha_2, \dots, a + \alpha_{n-1}$.

La condition énoncée s'exprime par l'équation

$$a(a + \alpha_1)(a + \alpha_2) \dots (a + \alpha_{n-1}) = na + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1}$$

ou bien

$$\begin{aligned} a^n + a^{n-1} \Sigma_1 + a^{n-2} \Sigma_2 + \dots + a^2 \Sigma_{n-2} + a \cdot \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \\ = na + \Sigma_1, \end{aligned}$$

et encore

$$\begin{aligned} a(n - \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{n-1}) \\ = a^n + (a^n - 1) \Sigma_1 + a^{n-2} \Sigma_2 + \dots + a^2 \Sigma_{n-2}. \end{aligned}$$

Le second membre est toujours positif, car $a \geq 1$, ce qui fait que $a^n - 1$ n'est jamais négatif : donc le premier membre doit être aussi positif, c'est-à-dire que

$$n > \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}.$$

Puisque tous ces nombres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ sont différents d'après la supposition que nous avons faite, et que le plus grand d'entre eux, α_{n-1} , est évidemment inférieur à n , on aura

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 2, \dots, \quad \alpha_{n-1} = n - 1.$$

Mais l'inégalité

$$n > 1.2.3 \dots (n-2)(n-1)$$

est généralement fausse, et l'on a même

$$n < (n-2)(n-1),$$

car la quantité

$$(n-2)(n-1) - n = n^2 - 4n + 2 = n(n-4) + 2$$

est toujours positive pour $n > 3$ et entier. Ainsi la solu-

tion est impossible à moins que l'on n'ait

$$n = 3, \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 2.$$

L'équation primitive devient alors

$$a(a+1)(a+2) = 3a+3 = 3(a+1),$$

d'où l'on tire

$$(a+1)(a^2+2a-3) = 0,$$

équation résolue pour $a=1$. En effet les nombres 1, 2, 3 vérifient l'énoncé.

Pour $n=2$, on aurait l'équation

$$a(a+1) = 2a+1$$

ou bien

$$a^2 - a - 1 = 0,$$

qui n'a pas de racine entière.

Donc enfin les nombres 1, 2, 3 fournissent la solution unique.

Le cas où l'on admet que deux ou plusieurs des nombres peuvent être égaux ne mérite pas de nous arrêter, car tous les nombres se décomposent suivant la condition indiquée. La somme des facteurs d'un nombre quelconque étant généralement inférieure à ce nombre, il suffira d'ajouter à cette somme des unités en quantité suffisante. Soit, par exemple, le nombre 10, on aura

$$5.2.1.1.1 = 5 + 2 + 1 + 1 + 1 = 10.$$

Les nombres premiers eux-mêmes se réduisent à cette règle au moyen d'une identité telle que $7 = 7$, c'est-à-dire en posant $n=1$.

Enfin nous observerons que cette règle fournit encore l'exemple unique des nombres différents

$$3.2.1 = 3 + 2 + 1 = 6.$$
