

FAURE

Solution de la question 294

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 1
(1862), p. 62-63

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__62_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1862, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 294

(voir t. XIII, p. 315);

PAR M. FAURE.

Soient $P_1, P_2, \dots, P_n$, n points matériels de mêmes masses; G_2 le centre de gravité de P_1, P_2 ; G_3 le centre de gravité de P_3 et de la masse $P_1 + P_2$ posée en G_2 ; G_4 le centre de gravité de P_4 et G_3 , et ainsi de suite, de sorte que G_n est le centre de gravité de P_n et de G_{n-1} . G_n est indépendant de la manière dont on prend les masses. Désignons par $A_{(i)}$ la distance de G_{i-1} à P_i ; la quantité

$$\frac{1}{2} (A_2)^2 + \frac{2}{3} (A_3)^2 + \frac{3}{4} (A_4) + \dots + \frac{n-1}{n} (A_n)^2$$

est constante dans quelque ordre qu'on prenne les masses. (STEINER.)

Lemme. — Soient A, B, C trois points en ligne droite, G un point quelconque; on a la relation

$$GA^2 \cdot BC + CB^2 \cdot AC = AB \cdot AC \cdot BC + GC^2 \cdot AB.$$

Si aux points A et B sont appliquées les masses respectives α , β , et que C soit leur centre de gravité, l'égalité précédente devient

$$\alpha \cdot GA^2 + \beta \cdot GB^2 = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} AB^2 + (\alpha + \beta) GC^2.$$

Démonstration. — Ceci admis, au lieu de supposer, comme dans le théorème de M. Steiner, que les points P aient des masses égales, je suppose qu'ils ont des masses inégales respectivement représentées par $p_1, p_2, \dots, p_n$. Soit alors

$$p_1 + p_2 + \dots + p_k = S_k,$$

et G un point pris arbitrairement; joignant ce point à tous les points P ainsi qu'aux points $G_2, G_3, \dots, G_n$, les triangles $GP_1 P_2, GG_2 P_3, \dots, GG_{n-1} P_n$ donnent

$$p_1 GP_1^2 + p_2 GP_2^2 = \frac{p_1 p_2}{s_2} P_1 P_2^2 + S_2 GG_1^2,$$

$$S_2 GG_2^2 + p_3 GP_3^2 = \frac{s_2 p_3}{s_3} G_2 P_3^2 + S_3 GG_3^2,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$S_{n-1} GG_{n-1}^2 + p_n GP_n^2 = \frac{s_{n-1} p_n}{s_n} G_{n-1} P_n^2 + S_n GG_n^2.$$

Si l'on vient à supposer que le point G coïncide avec G_n , centre de gravité de notre système de points, le terme GG_n est nul, de sorte qu'en ajoutant les égalités précédentes, on trouve

$$\begin{aligned} & \frac{p_1 p_2}{s_2} P_1 P_2^2 + \frac{s_2 p_3}{s_3} G_2 P_3^2 + \dots + \frac{s_{n-1} p_n}{s_n} G_{n-1} P_n^2 \\ &= p_1 G_n P_1^2 + p_2 G_n P_2^2 + \dots + p_n G_n P_n^2. \end{aligned}$$

Le second membre est constant, le premier le sera aussi.

Si les masses sont égales, on a le résultat de M. Steiner. Ce théorème donne des corollaires intéressants que l'équation indique d'elle-même.