NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. TISSOT

Démonstration nouvelles du théorème de Legendre sur les triangles sphériques dont les côtés sont très-petits relativement au rayon de la sphère

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 5-11

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__5_0>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

DÉMONSTRATIONS NOUVELLES

du théorème de Legendre sur les triangles sphériques dont les côtés sont très-petits relativement au rayon de la sphère (*);

PAR M. A. TISSOT.

Dans la résolution de chacun des triangles que l'on forme à la surface de la terre, soit pour déterminer la longueur d'un arc de méridien, soit pour construire la carte d'un pays, on connaît toujours les angles ainsi que l'un des côtés, et il s'agit d'obtenir les deux autres côtés du triangle. Si l'on voulait alors employer les formules de la trigonométrie sphérique, on aurait à faire usage de la plus simple de toutes, *l'analogie des quatre sinus;* cependant une pareille méthode ne saurait convenir pour la rapidité des calculs, car c'est la longueur du côté de départ qui est donnée directement, non le nombre de subdivisions du degré qu'il contient, et c'est aussi en les rapportant à l'unité de longueur que l'on veut évaluer les

(*) Voir, t. XV, p. 354 et t. XVI, p. 53, une discussion sur ce théorème entre deux géomètres de grand mérite et qui m'a aliéné l'amitié de l'un d'eux : *Genus irritabile geometrarum*. TM.

deux autres côtés. La même méthode conviendrait encore moins pour l'exactitude des résultats; en effet, quand bien même le rayon de la sphère qu'il faudrait employer serait suffisamment connu, les angles au centre correspondants aux côtés étant très-petits, les Tables trigonométriques ordinaires ne fourniraient pas assez d'approximation. On a donc imaginé d'autres procédés; le plus généralement employé est celui de Legendre, qui consiste à substituer la résolution d'un triangle rectiligne à celle du triangle sphérique.

Les appareils destinés aux opérations géodésiques de 1787, pour la jonction des observatoires de Paris et de Greenwich, ne pouvaient manquer de donner à la mesure des angles une précision jusqu'alors inconnue. Tandis que Ramsden perfectionnait le théodolite dont les Commissaires anglais firent usage, Lenoir construisait sous les yeux de Borda, et en appliquant le principe imaginé par Tobie Meyer, l'instrument devenu depuis si célèbre sous le nom de *cercle répétiteur*. Il fallait mettre les méthodes de calcul à la hauteur des moyens d'observation; c'est en cherchant à atteindre ce but que Legendre fut conduit à son théorème sur les triangles sphériques dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la sphère. Il en donna seulement l'énoncé dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* (année 1787), et ne publia la démonstration qu'en l'an VII dans un travail servant de préface à un ouvrage de Delambre intitulé : *Méthodes analytiques pour la détermination d'un arc de méridien*. Dans ce même ouvrage, se trouve une autre démonstration imaginée par Delambre qui l'a également exposée dans le chapitre XXXV de son *Traité d'Astronomie*. Le VI[e] cahier du *Journal de l'École Polytechnique* renferme une troisième démonstration due à Lagrange; c'est celle que Legendre a adoptée définitivement et qu'il a reproduite dans sa *Trigonométrie sphérique*. Enfin, dans le *Journal de Crelle*, t. XXII, Gauss en a donné une quatrième dont le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (année 1841) contient une traduction. Dans ses *Recherches générales sur les surfaces courbes*, il a même étendu le théorème de Legendre aux triangles formés par les lignes les plus courtes sur une surface courbe quelconque.

Les démonstrations de Legendre, de Delambre et de Gauss ne sont à proprement parler que des vérifications à posteriori : la première manque de rigueur, la seconde est compliquée et la troisième omet une partie importante dans les applications, celle qui est relative au calcul de l'excès sphérique; aussi est-ce la démonstration de Lagrange que l'on reproduit généralement, mais elle nécessite des calculs assez longs. Après avoir développé l'énoncé du théorème, je me propose d'en donner deux autres démonstrations exemptes des inconvénients des trois premières et plus simples que celle de Lagrange.

A un triangle sphérique quelconque, il est bien clair qu'il correspond toujours un triangle rectiligne ayant les mêmes côtés et dont on peut substituer la résolution à celle du premier; la question est de savoir comment on doit modifier les angles du triangle sphérique pour obtenir ceux du triangle rectiligne. Soient A, B, C les trois premiers, A′, B′, C′ les trois autres, a, b, c les longueurs des côtés communs aux deux triangles, le rayon de la sphère étant pris pour unité, enfin x, y, z les différences $A - A'$, $B - B'$, $C - C'$, différences qu'il s'agit de déterminer et dont on ne connaît encore que la somme, laquelle est égale à l'excès sphérique ε. Le triangle étant supposé formé à la surface de la terre, les rapports a, b, c sont très-petits, et l'on peut ne pas tenir compte de leurs quatrièmes puissances dans les valeurs de x, y, z;

cela revient à altérer les angles de quantités toujours inférieures à $0'',02$ et par conséquent bien au-dessous des erreurs d'observation. Si l'on néglige ainsi les termes du quatrième ordre (*), chaque angle du triangle rectiligne sera égal à l'angle correspondant du triangle sphérique diminué du tiers de l'excès sphérique; de plus les deux triangles seront égaux en surface. Ainsi l'on aura, en appelant T la surface du triangle rectiligne,

$$x = y = z = \frac{\varepsilon}{3} = \frac{T}{3} = \frac{bc \sin A'}{6} = \frac{a^2 \sin B' \sin C'}{6 \sin A'}.$$

Tel est le théorème de Legendre.

Première démonstration. — Nous partirons des formules bien connues

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)}},$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} A' = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$

où p représente le demi-périmètre pour l'un et l'autre triangle; dans la première, nous pouvons remplacer chacun des quatre sinus par son développement borné à deux termes et prendre par exemple

$$\sin p = p - \frac{1}{6} p^3 = p\left(1 - \frac{1}{6} p^2\right);$$

alors la valeur ci-dessus de $\operatorname{tang} \frac{1}{2} A'$ se trouvera en fac-

(*) Bientôt une methode où l'on tient compte du quatrième ordre et même, si l'on veut, d'un ordre quelconque, par M. Grunert. TM.

teur dans le second membre, et l'autre facteur sera

$$\left\{\frac{\left[1-\frac{1}{6}(p-b)^2\right]\left[1-\frac{1}{6}(p-c)^2\right]}{\left(1-\frac{1}{6}p^2\right)\left[1-\frac{1}{6}(p-a)^2\right]}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[1+\frac{p^2+(p-a)^2-(p-b)^2-(p-c)^2}{6}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(1+\frac{1}{3}bc\right)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{6}bc;$$

on a donc

$$\tang\frac{1}{2}A=\tang\frac{1}{2}A'\left(1+\frac{1}{6}bc\right).$$

On a aussi

$$\tang\frac{1}{2}A=\tang\frac{1}{2}(A'+x)=\frac{\tang\frac{1}{2}A'+\tang\frac{1}{2}x}{1-\tang\frac{1}{2}A'\tang\frac{1}{2}x};$$

or x est du même ordre de petitesse que ε ou que la surface du triangle sphérique, c'est-à-dire du second ordre; nous pouvons donc négliger x^2 et alors la dernière égalité devient

$$\tang\frac{1}{2}A=\tang\frac{1}{2}A'\left(1+\frac{x}{\sin A'}\right).$$

En comparant cette nouvelle expression avec la première, on voit qu'il faut prendre

$$x=\frac{1}{6}bc\sin A'=\frac{1}{3}T;$$

à cause de la symétrie, les valeurs de y et de z seront aussi égales à $\frac{1}{3}T$ et la somme ε à T.

Seconde démonstration. — La formule qui sert à calculer le côté d'un triangle sphérique, quand on connaît les trois angles, est

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon\sin\left(A+\frac{1}{2}\varepsilon\right)}{\sin\left(B+\frac{1}{2}\varepsilon\right)\sin\left(C+\frac{1}{2}\varepsilon\right)}},$$

on en tire

$$\sin\frac{1}{2}\varepsilon=\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}a\,\frac{\sin\left(B+\frac{1}{2}\varepsilon\right)\sin\left(C+\frac{1}{2}\varepsilon\right)}{\sin\left(A+\frac{1}{2}\varepsilon\right)},$$

ou, en négligeant le quatrième ordre,

$$\varepsilon=\frac{a^2\sin B'\sin C'}{2\sin A'}=T.$$

Cela posé, on a

$$\frac{\sin A}{\sin A'}=\frac{\sin(A+x)}{\sin A'}=1+x\cot A',$$

$$\frac{a}{\sin a}=1+\frac{1}{6}a^2=1+\frac{1}{12}a^2+\frac{b^2+c^2-2bc\cos A'}{12}$$

$$=1+\frac{a^2+b^2+c^2}{12}-\frac{1}{3}T\cot A';$$

si l'on multiplie membre à membre, il viendra

$$\frac{a}{\sin A'}\cdot\frac{\sin A}{\sin a}=1+\frac{a^2+b^2+c^2}{12}+\left(x-\frac{1}{3}T\right)\cot A'.$$

Le premier membre de cette dernière égalité ne doit pas changer quand on y remplace a par b et A par B, ou encore a par c et A par C; il faut donc qu'il en soit de même du second, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{x-\frac{1}{3}T}{\operatorname{tang}A'}=\frac{y-\frac{1}{3}T}{\operatorname{tang}B'}=\frac{z-\frac{1}{3}T}{\operatorname{tang}C'}$$

$$=\frac{\varepsilon-T}{\operatorname{tang}A'+\operatorname{tang}B'+\operatorname{tang}C'}=0,$$

et, par conséquent,

$$x = y = z = \frac{1}{3} T.$$

Les triangles relatifs aux opérations de 1787 sont les premiers pour lesquels on se soit préoccupé de l'excès sphérique; auparavant cet excès restait confondu avec les erreurs d'observation, et comme on répartissait le tout également entre les trois angles, on suivait instinctivement, pour les triangles principaux, la méthode à laquelle le théorème de Legendre a conduit. Mais dans les triangles partiels que determine la méridienne, l'un des angles est inconnu, et le calcul de l'excès sphérique, tel que permet de le faire la méthode de Legendre, devient nécessaire. D'ailleurs ce calcul a l'avantage, lorsqu'il s'agit des triangles principaux, de donner les erreurs d'observation pour la somme des trois angles.