

COLOT

Solution de la question 509

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 1
(1862), p. 57-60

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__57_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1862, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 509

(voir t. XIX, p. 48) ;

PAR M. COLOT,

Professeur.

Soient p et q deux nombres donnés, p_1 la moyenne arithmétique, q_1 la moyenne géométrique, p_2 la moyenne arithmétique de p_1 et q_1 , q_2 leur moyenne géométrique, et ainsi de suite, de sorte que p_{n+1} , q_{n+1} sont les moyennes arithmétiques et géométriques de p_n , q_n . Quelle est la valeur de p_∞ et démontrer que $p_\infty = q_\infty$. (GAUSS.)

Il est facile de montrer que $p_\infty = q_\infty$. En effet on a, par définition des quantités q_1 et p_1 ,

$$p_1 = \frac{p+q}{2}, \quad q_1 = \sqrt{pq},$$

d'où

$$p_1 - q_1 = \frac{p+q-2\sqrt{pq}}{2} = \frac{p-2\sqrt{q}(\sqrt{p}-\sqrt{q})}{2} < \frac{p-q}{2};$$

on aurait de même

$$p_2 - q_2 < \frac{p_1 - q_1}{2} < \frac{p-q}{4},$$

$$p_3 - q_3 < \frac{p_2 - q_2}{2} < \frac{p-q}{8},$$

et, en général,

$$p_n - q_n < \frac{p - q}{2^n},$$

ce qui démontre que la différence $p_n - q_n$ a pour limite zéro.

Avant de chercher la valeur commune des deux quantités p_∞ , q_∞ , nous établirons quelques lemmes.

Lemmes. — Soient c , c_1 , $c_2, \dots$, une suite de quantités plus petites que l'unité et croissantes, liées entre elles par les relations

$$c_1 = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}, \quad c_2 = \frac{2\sqrt{c_1}}{1+c_1}, \dots$$

Soient

$$b = \sqrt{1-c^2}, \quad b_1 = \sqrt{1-c_1^2},$$

on aura

1°

$$(\alpha) \quad b = \frac{2\sqrt{b_1}}{1+b_1}, \quad b_1 = \frac{2\sqrt{b_2}}{1+b_2}.$$

2°

$$(\beta) \quad 1 + b_1 = \frac{2}{1+c}, \quad 1 + b_2 = \frac{2}{1+c_1}.$$

3°

$$(\gamma) \quad \left\{ \begin{array}{l} D(c_n) = (1+c)(1+c_1) \dots (1+c_{n-1}) D(c) \\ \quad \quad \quad (\text{VERHULST, Fonctions elliptiques, p. 148.}) \end{array} \right.$$

4°

$$(\delta) \quad D(b) = (1+b_n)(1+b_{n-1}) \dots (1+b_1) D(b_n).$$

5°

$$(\epsilon) \quad D(b) = \frac{2}{1+c_{n-1}} \cdot \frac{2}{1+c_{n-2}} \dots \frac{2}{1+c} D(b_n).$$

6°

$$(\lambda) \quad (1+c)(1+c_1)\dots(1+c_{n-1}) = \frac{2^n D(b_n)}{D(b)}.$$

[D(b) représente la fonction elliptique complète de pre-

mière espèce $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-b^2 \sin^2 \varphi}}$, et ainsi des autres.)

Les égalités (α) et (β) se vérifient sans difficulté.

(δ) ne diffère de (γ) qu'en ce que les modules $c, c_1, c_2, \dots$, ont été remplacés par $b_n, b_{n-1}, \dots$, qui ont entre eux les mêmes relations.

(ε) est une conséquence immédiate de (β) et de (δ).

Enfin en résolvant (γ) par rapport au produit $(1+c)(1+c_1)\dots(1+c_{n-1})$, on obtient la formule (λ).

Passons maintenant à la recherche de $p\infty$.

Posons

$$\frac{q}{p} = c, \quad \frac{q_1}{p_1} = c_1, \quad \dots, \quad \frac{q_n}{p_n} = c_n, \dots$$

Nous aurons

$$p_n = \frac{p_{n-1} + q_{n-1}}{2}, \quad q_n = \sqrt{p_{n-1} q_{n-1}},$$

$$\frac{q_n}{p_n} = \frac{2\sqrt{p_{n-1} q_{n-1}}}{p_{n-1} + q_{n-1}}$$

ou

$$c_n = \frac{2\sqrt{c_{n-1}}}{1 + c_{n-1}};$$

par conséquent tout ce qui a été dit précédemment est

applicable à la suite de rapports $\frac{q}{p}, \frac{q_1}{p_1}$, etc.

De plus on a

$$\begin{aligned} 2p_1 &= p + q = p(1 + c), \\ 2p_2 &= p_1 + q_1 = p_1(1 + c_1), \\ &\dots\dots\dots \\ 2p_n &= p_{n-1} + q_{n-1} = p_{n-1}(1 + c_{n-1}). \end{aligned}$$

Multipliant membre à membre et supprimant les facteurs communs,

$$2^n p_n = p(1 + c)(1 + c_1) \dots (1 + c_{n-1}),$$

$$\text{et comme } (1 + c)(1 + c_1) \dots (1 + c_{n-1}) = \frac{2^n D(b_n)}{D(b)},$$

$$p_n = p \cdot \frac{D(b_n)}{D(b)},$$

pour $n = \infty$, $c_n = 1$, $b_n = 0$,

$$D(b_n) = \frac{\pi}{2};$$

donc

$$p\infty = \frac{p\pi}{2D(b)},$$

remplaçant b par sa valeur

$$\sqrt{1 - c^2} = \sqrt{1 - \frac{q^2}{p^2}} = \frac{1}{p} \sqrt{p^2 - q^2},$$

nous aurons pour valeur définitive

$$p\infty = \frac{p\pi}{2D\left(\frac{1}{p} \sqrt{p^2 - q^2}\right)}.$$
