

J. ROMAND

Question du concours d'agrégation pour les lycées (année 1862)

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 1
(1862), p. 470-473

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__470_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1862, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**QUESTION DU CONCOURS D'AGRÉGATION POUR LES LYCÉES
(ANNÉE 1862);**

SOLUTION DE M. J. ROMAND,
Licencié ès Sciences mathématiques et ès Sciences physiques.

Composition en Analyse appliquée.

Étant données deux droites non situées dans le même plan, on fait passer par ces droites un paraboloïde hyperbolique auquel on mène un plan tangent parallèle à un plan fixe et donné : on demande le lieu du point de contact.

L'origine des coordonnées sera le milieu O de la plus courte distance AA' des deux droites données D, D'; les parallèles menées à ces droites par le point O seront les axes des z et des y ; l'axe des x sera dans la direction de AA', par conséquent perpendiculaire au plan yz .

En désignant par $2a$ la distance AA', les équations des droites données sont

$$(D) \quad y = 0, \quad x = a, \qquad (D') \quad z = 0, \quad x = -a.$$

Soient

$$G) \qquad y = \epsilon x + b, \quad z = \gamma x + c$$

les équations d'une droite qui engendre un parabolôïde en restant assujettie aux deux conditions de glisser sur les deux droites données et d'être toujours parallèle à un plan directeur représenté par

$$(P) \quad x + m\gamma + nz = p.$$

La première condition conduit à

$$(1) \quad 0 = \epsilon a + b, \quad 0 = \gamma a - c;$$

la seconde à

$$(2) \quad 1 + m\epsilon + n\gamma = 0.$$

L'élimination des quatre paramètres variables ϵ, γ, b, c entre ces trois équations et les deux équations (G) fournira celle du parabolôïde.

Les équations (G) et (1) donnent

$$\epsilon = \frac{\gamma}{x - a}, \quad \gamma = \frac{z}{x + a};$$

remplaçant ϵ et γ par ces valeurs dans l'équation (2), on a

$$(3) \quad 1 + \frac{m\gamma}{x - a} + \frac{nz}{x + a} = 0,$$

d'où

$$x^2 + nzx + mxy + amy - anz - a^2 = 0;$$

m et n restant arbitraires, cette équation représente tout parabolôïde hyperbolique passant par les deux droites données D, D'.

D'après une règle connue, l'équation du plan tangent au point x, y, z d'un de ces parabolôïdes est

$$(2x + m\gamma + nz)x' + m(x + a)\gamma' + n(x - a)z' + amy - anz - 2a^2 = 0.$$

Pour que ce plan soit parallèle au plan donné

$$(P') \quad Ax' + By' + Cz' + D = 0,$$

il faut qu'on ait

$$(4) \quad B(2x + my + nz) = Am(x + a),$$

$$(5) \quad Cm(x + a) = Bn(x - a).$$

Il ne reste plus qu'à éliminer m et n entre ces deux équations et celle des paraboloides pour avoir l'équation du lieu géométrique demandé.

L'équation (5) donne $m = \frac{B(x-a)}{C(x+a)} n$; substituant cette valeur à m dans l'équation (4) et tirant celle de n , on a

$$n = \frac{-2Cx(x+a)}{(x-a)(By - Ax - Aa) + Cz(x+a)},$$

$$m = \frac{-2Bx(x-a)}{(x-a)(By - Ax - Aa) + Cz(x+a)};$$

par la substitution de ces valeurs à m, n dans l'équation (3), on obtient d'abord

$$1 - \frac{2Bxy + 2Czx}{(x-a)(By - Ax - Aa) + Cz(x+a)} = 0,$$

puis, toutes réductions faites,

$$Ax^2 + Czx + Bxy + Bay - Caz - Aa^2 = 0.$$

Si le lieu avait un centre, les coordonnées de ce point seraient déterminées par les équations

$$(C) \quad 2Ax + By + Cz = 0, \quad Bx + Ba = 0, \quad Cx - Ca = 0.$$

Lorsque B et C diffèrent l'un et l'autre de zéro, les deux dernières sont incompatibles; le lieu n'a donc pas de centre. Son équation se réduit, pour $x=0$, à

$$By - Cz - Aa = 0,$$

ce qui indique qu'il est coupé suivant une droite seulement par le plan yz ; ce lieu est donc un *paraboloïde hyperbolique* ayant un plan directeur parallèle au plan

yz et par conséquent parallèle aux deux droites D, D' . On voit facilement du reste qu'il passe par ces deux droites, car son équation est vérifiée par $y = 0, x = a$ pour toute valeur de z , et par $z = 0, x = -a$ pour toute valeur de y ; c'est donc un des paraboloides indiqués dans l'énoncé.

B et C étant toujours supposés différents de zéro, lorsque $A = 0$, c'est-à-dire lorsque le plan donné (P') est parallèle à la plus courte distance AA' , le lieu est encore un paraboloïde hyperbolique, et dans ce cas il contient, outre D et D' , la plus courte distance AA' , car son équation est vérifiée par $z = 0, x = 0$, quel que soit x .

Quand C ou B est nul, c'est-à-dire quand le plan (P') est parallèle à D ou à D' , le lieu change de nature. Si l'on suppose par exemple $C = 0$, son équation se réduit à

$$Ax^2 + Bxy + Bay - Aa^2 = 0,$$

équation qui se décompose ainsi

$$(x + a)(By + Ax - Aa) = 0,$$

et qui montre que le lieu est formé du système de deux plans.

Le premier, $(x + a) = 0$, parallèle au plan des yz , passe par la droite D' .

Le second, $By + Ax - Aa = 0$, parallèle au plan donné $Ax + By + D = 0$, passe par la droite D .

Enfin, quand on a en même temps $C = 0, B = 0$, c'est-à-dire lorsque le plan (P') est parallèle à D et à D' , le lieu se compose de deux plans parallèles, car son équation se réduit à $x^2 - a^2 = 0$. C'est le système de deux plans menés respectivement par D, D' et parallèles à (P').
