

J. DE VIRIEU

Sur une identité de Waring

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 1
(1862), p. 45-48

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__45_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1862, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UNE IDENTITÉ DE WARING;

PAR M. J. DE VIRIEU,

Professeur à Lyon.

1. A la page 583 du tome IV des *Nouvelles Annales*, on trouve ce qui suit :

« Soient n quantités quelconques, $a_1, a_2, \dots, a_n$, on a toujours cette identité :

$$\begin{aligned} & a_1 a_2 (a_1 + a_2) + (a_1 + a_2) a_3 (a_1 + a_2 + a_3) + \dots \\ & \quad + (a_1 + \dots + a_{n-1}) a_n (a_1 + \dots + a_n) \\ &= a_n a_{n-1} (a_n + a_{n-1}) + (a_n + a_{n-1}) a_{n-2} (a_n + a_{n-1} + a_{n-2}) + \dots \\ & \quad + (a_n + \dots + a_2) a_1 (a_n + \dots + a_2). \end{aligned}$$

» Waring déduit cette identité d'une propriété de la
» parabole; il serait intéressant de l'établir analytiquement. »

2. Il suffit de démontrer que le premier membre de

l'identité proposée est une fonction symétrique des quantités $a_1, a_2, \dots, a_n$; car le second membre se déduit du premier en remplaçant chacune des quantités de la première des deux lignes ci-dessous,

$$\begin{aligned} a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_{n-1}, a_n, \\ a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-1+i}, \dots, a_2, a_1, \end{aligned}$$

par la quantité de même rang dans la deuxième ligne.

3. Soit P_n le premier membre de l'identité proposée; n est un entier absolu au moins égal à 2, et l'on a par définition

$$P_n = \sum_{n=1}^{n=n-1} [(a_1 + \dots + a_n) a_{n+1} (a_1 + \dots + a_{n+1})],$$

d'où

$$(A) \quad P_{n+1} = P_n + (a_1 + \dots + a_n) a_{n+1} (a_1 + \dots + a_{n+1}).$$

4. Développons quelques valeurs particulières de P_n .

$$P_2 = a_1 a_2 (a_1 + a_2),$$

$$\begin{aligned} P_3 &= P_2 + (a_1 + a_2) a_3 (a_1 + a_2 + a_3) \\ &= [(a_1 + a_2 + a_3) a_1 a_2 - a_1 a_2 a_3] + [(a_1 + a_2 + a_3) (a_1 a_3 + a_2 a_3)] \\ &= [a_1 + a_2 + a_3 (a_1 a_2) + a_1 a_3 + a_2 a_3] - a_1 a_2 a_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_4 &= P_3 + (a_1 + a_2 + a_3) a_4 (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \\ &= \begin{cases} + [(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) (a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3) \\ \quad - a_4 (a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3) - a_1 a_2 a_3] \\ + [(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) (a_4 a_1 + a_4 a_2 + a_4 a_3)] \end{cases} \\ &= \begin{cases} + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) (a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 + a_4 a_1 + a_4 a_2 + a_4 a_3) \\ - (a_1 a_2 a_4 + a_1 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_4 + a_1 a_2 a_3). \end{cases} \end{aligned}$$

5. Désignons par ${}_p S_q$ la somme des produits différents

de q facteurs qu'on peut former avec les p quantités distinctes $a_1, a_2, \dots, a_p$; ${}_pS_q$ sera une fonction symétrique de ces quantités, et les formules du n° 4 deviennent

$$P_2 = {}_2S_1 \times {}_2S_2,$$

$$P_3 = {}_3S_1 \times {}_3S_2 - {}_3S_3,$$

$$P_4 = {}_4S_1 \times {}_4S_2 - {}_4S_3,$$

d'où par induction :

$$(B) \quad P_n = {}_nS_1 + {}_nS_2 - {}_nS_3,$$

formule qu'il faut vérifier.

6. Supposons cette formule exacte pour une valeur particulière ν de n , on aura

$$P_\nu = {}_\nu S_1 \times {}_\nu S_2 - {}_\nu S_3,$$

et en vertu de la formule (A)

$$P_{\nu+1} = P_\nu + (a_1 + \dots + a_\nu) a_{\nu+1} (a_1 + \dots + a_{\nu+1}),$$

ou

$$P_{\nu+1} = {}_\nu S_1 \times {}_\nu S_2 - {}_\nu S_3 + (a_1 + \dots + a_\nu) a_{\nu+1} (a_1 + \dots + a_{\nu+1}),$$

$$P_{\nu+1} = ({}_{\nu+1}S_1 - a_{\nu+1}) {}_\nu S_2 - {}_\nu S_3 + {}_{\nu+1}S_1 \times a_{\nu+1} \times (a_1 + \dots + a_\nu),$$

$$P_{\nu+1} = {}_{\nu+1}S_1 ({}_\nu S_2 + a_{\nu+1} (a_1 + \dots + a_\nu) - ({}_\nu S_3 + a_{\nu+1} {}_\nu S_2));$$

mais

$${}_\nu S_2 + a_{\nu+1} (a_1 + \dots + a_\nu) = {}_{\nu+1}S_2,$$

$${}_\nu S_3 + a_{\nu+1} {}_\nu S_2 = {}_{\nu+1}S_3,$$

donc

$$P_{\nu+1} = {}_{\nu+1}S_1 \times {}_{\nu+1}S_2 - {}_{\nu+1}S_3.$$

7. Si donc la formule (B) est vraie pour une valeur particulière de n , elle est vraie pour la valeur de n immédiatement supérieure à celle-là ; or, en vertu du n° 5, elle est vraie pour $n = 2.3.4$; donc elle est générale ; la fonction P_n , mise sous cette forme, est évidemment une fonc-

(48)

tion symétrique des quantités $a_1, \dots, a_n$, ce qui démontre l'identité proposée.