

V.-A. LE BESGUE

Arithmologie élémentaire

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 1
(1862), p. 405-413

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__405_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1862, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ARITHMOLOGIE ÉLÉMENTAIRE;

PAR V.-A. LE BESGUE.

TROISIÈME ARTICLE.

11. Dans les calculs suivants, $\varphi(x)$ étant une fonction de x , en ce sens qu'elle en dépend d'une manière quelconque, connue ou inconnue, on représentera par $\varphi_0(x)$ une quantité $< \varphi(x)$, et par $\varphi_1(x)$ une quantité $> \varphi(x)$. Les quantités $\varphi_1(x)$, $\varphi_0(x)$ seront nommées des limites supérieure et inférieure de $\varphi(x)$, mais sans attacher au mot *limite* sa véritable signification. On emploiera les

inégalités évidentes

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) \cdot \theta_1(x) &> \varphi(x) \cdot \theta(x) > \varphi_0(x) \cdot \theta_0(x), \\ \varphi_1(x) - \theta_0(x) &> \varphi(x) - \theta(x) > \varphi_0(x) - \theta_1(x),\end{aligned}$$

et quelques autres qu'il serait inutile d'inscrire ici.

Pour avoir deux limites simples de la somme des logarithmes des nombres consécutifs 1, 2, 3, . . . , x , c'est-à-dire $\log \Pi x$ ou $\Sigma \log x$, il faut prendre l'inégalité déjà citée

$$\left(\frac{x}{2}\right)^x > \Pi x > \left(\frac{x}{e}\right)^x,$$

où l'on suppose $x > 5$ et e égal à la base du système des logarithmes népériens.

Si l'on prend les logarithmes pour une base quelconque, par exemple pour la base 10, on aura

$$x(\log x - \log 2) > \Sigma \log x > x(\log x - \log e).$$

Dans les calculs suivants, on aura à considérer la somme $\Sigma \log E(x)$, où $E(x)$ est l'entier d'une quantité fractionnaire x ; l'inégalité

$$E(x)[\log E(x) - \log 2] > \Sigma \log E(x) > E(x)[\log E(x) - \log e]$$

devra être exprimée en fonction de x .

En augmentant le premier membre ou la limite supérieure, on lui donnera la forme

$$x(\log x - \log 2).$$

En diminuant la limite inférieure, on lui donnera la forme

$$(x-1)[\log(x-1) - \log e].$$

Si l'on met $(x-1) \log(x-1)$ sous la forme

$$(x-1) \left[\log x + \log \left(\frac{x-1}{x} \right) \right],$$

on aura

$$(x-1)[\log(x-1) - \log e] \\ = x(\log x - \log e) - \log x + \log e + (x-1)\log\left(\frac{x-1}{x}\right).$$

Or il est facile de montrer que la quantité négative

$$(x-1)\log\left(\frac{x-1}{x}\right) = (x-1)\log\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

n'atteint pas $\log e$ en valeur absolue.

$$-\log\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \log e \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + \dots \right) \\ < \log e \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots \right) < \frac{\log e}{x-1};$$

de là

$$-(x-1)\log\left(\frac{x-1}{x}\right) < \log e.$$

On aurait pu faire

$$-(x-1)\log\left(\frac{x-1}{x}\right) = (x-1)\log\left(\frac{x-1}{x}\right) \\ = (x-1)\log\left(1 + \frac{1}{x-1}\right) \\ = \log\left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^{x-1},$$

quantité qui, pour x tendant vers l'infini, tend vers $\log e$.

On admettra donc, dans tous les cas, l'inégalité

$$(f) \quad x(\log x - \log 2) > \Sigma \log E(x) > x(\log x - \log e) - \log x.$$

12. Connaissant deux limites du logarithme de $\Pi(x)$,

(408)

on peut en trouver deux du logarithme de

$$\Pi_1(x) = \frac{\Pi(x) \cdot \Pi\left(\frac{x}{30}\right)}{\Pi\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \Pi\left(\frac{x}{3}\right) \cdot \Pi\left(\frac{x}{5}\right)},$$

où c'est pour abréger que l'on n'a pas mis $E\left(\frac{x}{30}\right)$, $E\left(\frac{x}{2}\right) \dots$, au lieu de $\frac{x}{30}$, $\frac{x}{2}$, etc.

On a donc

$$\begin{aligned} \log \Pi_1(x) &= \Sigma \log x + \Sigma \log E\left(\frac{x}{30}\right) \\ &\quad - \left[\Sigma \log E\left(\frac{x}{2}\right) + \Sigma \log E\left(\frac{x}{3}\right) + \Sigma \log E\left(\frac{x}{5}\right) \right]. \end{aligned}$$

Admettant le cas le plus général où x n'est pas entier, et posant

$$\log \Pi_1(x) = \varphi(x) - \theta(x),$$

il viendra

$$\varphi_1(x) = \frac{31}{30} x (\log x - \log 2) - x \log \sqrt[3]{30},$$

$$\theta_1(x) = \frac{31}{30} x (\log x - \log 2) - x \log \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[5]{5},$$

et de même

$$\varphi_0(x) = \frac{31}{30} x (\log x - \log e) - x \log \sqrt[3]{30} - 2 \log x - \log 30,$$

$$\theta_0(x) = \frac{31}{30} x (\log x - \log e) - x \log \sqrt{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[5]{5} - 3 \log x + \log 30,$$

ou encore

$$\varphi_0(x) = \varphi_1(x) - \frac{31}{30} x (\log e - \log 2) - 2 \log x + \log 30,$$

$$\theta_0(x) = \theta_1(x) - \frac{31}{30} x (\log e - \log 2) - 3 \log x + \log 30.$$

Substituant dans

$$\varphi_1(x) - \theta_0(x) > \log \Pi_1(x) > \phi_0(x) - \theta_1(x),$$

il vient

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) - \theta_1(x) + \frac{31}{30} x \log \left(\frac{e}{2} \right) + 3 \log x - \log 30 &> \log \Pi_1(x) \\ &> \varphi_1(x) - \theta_1(x) - \frac{31}{30} x \log \left(\frac{e}{2} \right) - 2 \log x + \log 30, \end{aligned}$$

et comme l'on a

$$\varphi_1(x) - \theta_1(x) = x \log \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[5]{5}}{\sqrt[30]{30}},$$

en posant

$$a = \log \frac{\sqrt{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[5]{5}}{\sqrt[30]{30}} + \frac{31}{30} \log \left(\frac{e}{2} \right) = 0,5374,$$

$$a' = \log \frac{\sqrt{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[5]{5}}{\sqrt[30]{30}} - \frac{31}{30} \log \left(\frac{e}{2} \right) = 0,2624,$$

il vient

$$(g) \quad ax + 3 \log x > \log \Pi_1(x) > a'x - 2 \log x,$$

en augmentant la limite supérieure de $\log 30$ et diminuant l'inférieure de $\log 30$.

13. Au moyen des limites précédentes de $\Pi_1(x)$, on peut trouver celles de

$$P_1(x) = P(x) \cdot P(\sqrt{x}) \cdot P(\sqrt[3]{x}) \dots$$

D'après le théorème du n° 9 on a

$$\Pi_1(x) \cdot \Pi_1\left(\frac{x}{6}\right) \cdot \Pi_1\left(\frac{x}{6^2}\right) \dots \Pi_1\left(\frac{x}{6^j}\right) > P_1(x) > \Pi_1(x);$$

passant aux logarithmes, le premier membre devient

$$a \left(x + \frac{x}{6} + \frac{x}{6^2} + \dots + \frac{x}{6^j} \right) + 3 \left(\log x + \log \frac{x}{6} + \dots + \log \frac{x}{6^j} \right),$$

en supposant $x = \lambda 6^y$, y entier et $\lambda < 6$, d'où l'on tire

$$y \log 6 = \log x - \log \lambda, \quad 1 + y = 1 + \frac{\log x - \log \lambda}{\log 6},$$

on voit que la partie

$$\begin{aligned} a \left(x + \frac{x}{6} + \dots + \frac{x}{6^y} \right) &= ax \left(\frac{1 - \frac{1}{6^{y+1}}}{1 - \frac{1}{6}} \right) \\ &= \frac{6}{5} ax \left(1 - \frac{\lambda}{6x} \right) = \frac{6a}{5} \left(x - \frac{\lambda}{6} \right), \end{aligned}$$

on la remplacera par $\frac{6a}{5} x$, en l'augmentant.

La partie

$$\begin{aligned} &3 \left(\log x + \log \frac{x}{6} + \log \frac{x}{6^2} + \dots + \log \frac{x}{6^y} \right) \\ &= 3(y+1) \left(\log x - \frac{y \log 6}{2} \right) \\ &= 3 \left(1 + \frac{\log x - \log \lambda}{\log 6} \right) \left(\frac{\log x + \log \lambda}{2} \right) \\ &= \frac{3 \log^2 x}{2 \log 6} + \frac{3}{2} \log x - \frac{3 \log^2 \lambda}{2 \log 6} + \frac{3}{2} \log \lambda. \end{aligned}$$

Comme $\log 6 = 0,47712$, on peut, en augmentant cette partie, la réduire à

$$\frac{3}{2 \log 6} \log^2 x + \frac{3}{2} \log x + 1,2.$$

On aura donc l'inégalité

$$(h) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{6a}{5} x + \frac{3}{2 \log 6} \log^2 x + \frac{3}{2} \log x + 1,2 > \log P_1(x) \\ > a' x - 2 \log x. \end{array} \right.$$

14. Enfin, pour avoir les limites de $\log P(x)$ ou de la somme des nombres premiers non supérieurs à x , il faut employer l'inégalité

$$\frac{P_1(x)}{P_1(\sqrt{x})} > P(x) > \frac{P_1(x)}{[P_1(\sqrt{x})]^2},$$

en prendre les logarithmes, remplacer le premier membre par une quantité plus grande, le dernier par une quantité plus petite; les inégalités (h) conduisent ainsi à cette autre

$$\begin{aligned} & \frac{6a}{5}x + \frac{3}{2\log 6} \log^2 x + \frac{3}{2} \log x + 1,2 - a'\sqrt{x} + \log x \\ & > \log P(x) > a'x - 2\log x - \frac{12a}{5}\sqrt{x} - \frac{3}{4} \frac{\log^2 x}{\log 6} \\ & \quad - \frac{3}{2} \log x - 2,4, \end{aligned}$$

ou bien, en réduisant,

$$(i) \left\{ \begin{aligned} & \frac{6ax}{5} - a'\sqrt{x} + \frac{3}{2\log 6} \log^2 x + \frac{5}{2} \log x + 1,2 > \log P(x), \\ & \log P(x) > a'x - \frac{12a}{5}\sqrt{x} \\ & \quad - \frac{3}{4} \frac{\log^2 x}{\log 6} - \frac{7}{2} \log x - 2,4. \end{aligned} \right.$$

Au moyen de ces limites de $\log P(x) = \varphi(x)$, l'inégalité

$$\varphi_0(mx) - \varphi_1(x) > K(\log x + \log m),$$

qui exprime, quand elle est satisfaite, qu'il y a plus de

K nombres premiers entre x et mx , devient

$$(c') \left\{ \begin{aligned} & \left(a'm - \frac{6}{5}a \right) x - \left(\frac{12\sqrt{m}}{5}a - a' \right) \sqrt{x} - \frac{9}{4} \frac{\log^2 x}{\log 6} \\ & - \left(\frac{3 \log m}{3 \log 6} + 6 \right) \log x - \left(\frac{3 \log^2 m}{4 \log 6} + \frac{7}{2} \log m + 3,6 \right) \\ & > K \log x + K \log m. \end{aligned} \right.$$

Cette inégalité ne peut être satisfaite que pour

$$m > \frac{6}{5} \frac{a}{a'} > 2,459 \quad \text{ou} \quad m > 2,46.$$

Si on la met sous la forme

$$x - A\sqrt{x} > B \log^2 x + C \log x + D,$$

où A, B, C, D sont positifs, on trouvera bientôt, pour une valeur donnée de $m > 2,46$, qu'au-dessus d'une certaine valeur de x il y aura plus de K nombres premiers entre x et mx .

15. En partant de la formule de M. Liouville :

$$\Sigma \log x = \sqrt{2\pi} + x \log x - x + \frac{1}{2} \log x + \frac{\mu}{12x},$$

μ étant compris entre 0 et 1, M. Tchebichew a trouvé pour limites de la somme des logarithmes non supérieurs à x les expressions

$$\begin{aligned} & \frac{6A}{5} x - A\sqrt{x} + \frac{5}{4 \log 6} \log^2 x + \frac{5}{2} \log x + 2, \\ & Ax - \frac{12}{5} A\sqrt{x} - \frac{5}{8 \log 6} \log^2 x - \frac{15}{4} \log x - 3, \end{aligned}$$

en supposant les logarithmes népériens et

$$A = \log \frac{\sqrt{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[4]{5}}{\sqrt[3]{30}};$$

de là l'inégalité

$$\begin{aligned} \Lambda \left(m - \frac{6}{5} \right) x - \left(\frac{12\sqrt{m}}{5} - 1 \right) \Lambda \sqrt{x} &> \frac{15}{8 \log 6} \log^2 x \\ &+ \left(\frac{5 \log m}{4 \log 6} + \frac{25}{4} + K \right) \log x \\ &+ \left[\frac{5 \log^2 m}{8 \log 6} + \left(\frac{15}{4} + K \right) \log m + 5 \right] > 0. \end{aligned}$$

Cette inégalité n'apprend rien quand on n'a pas $m > \frac{6}{5}$;

mais quand $m > \frac{6}{5}$, en prenant x suffisamment grand on

fait tomber entre x et mx autant de nombres premiers qu'on voudra. Ainsi pour $m=2$, au delà de $x=169=13^2$, il y a plus de quatre nombres premiers entre x et $2x$. Cette limite de x est beaucoup trop grande; la table de Burckhardt fait voir que $x=22$ suffit. Il est à désirer que le problème soit repris et résolu pour de moindres valeurs de m , en employant, s'il est possible, une fonction autre que $\Sigma \log x$.
