

LÉON SANCERY

De la méthode des substitutions successives pour le calcul des racines des équations

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 1
(1862), p. 384-400

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__384_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1862, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DE LA MÉTHODE DES SUBSTITUTIONS SUCCESSIVES POUR LE CALCUL DES RACINES DES ÉQUATIONS

(voir page 305),

PAR M. LÉON SANCERY,
Professeur au lycée d'Auch.

V.

Application à l'équation du second degré.

Écrivons l'équation $x^2 + px + q = 0$ de la manière suivante :

$$x = -\frac{q}{p} - \frac{x^2}{p}.$$

La dérivée du second membre est $-\frac{2x}{p}$; on ne pourra utiliser la méthode des substitutions successives pour le calcul des racines x, x', x'' que dans le cas où les valeurs $-\frac{2x'}{p}, -\frac{2x''}{p}$ seront comprises entre -1 et $+1$.

1° Supposons les racines x', x'' de même signe, et $x' < x''$ en valeur absolue. On aura $p = -(x' + x'')$, par suite $-\frac{2x}{p} = \frac{2x}{x' + x''}$. La valeur de cette dérivée est positive pour $x = x', x = x''$; mais elle n'est inférieure à l'unité que pour $x = x'$. Ainsi la forme ci-dessus donnée à l'équation ne permet que le calcul de la racine qui a la plus petite valeur numérique.

Déterminons quelles peuvent être les valeurs initiales ou de départ. Il suffit de chercher quelles sont les valeurs qui rendent $-\frac{2x}{p} \geq 1$ et de prendre l'une de ces valeurs.

On trouve ainsi que x doit être compris entre 0 et $-\frac{p}{2}$.

On peut donc prendre pour première valeur $x_1 = -\frac{q}{p}$; car, les racines étant réelles, $-\frac{q}{p}$ est toujours compris entre 0 et $-\frac{p}{2}$.

2° Supposons les racines de signes contraires, l'équation est alors $x^2 + px - q = 0$, d'où $x = \frac{q}{p} - \frac{x^2}{p}$. Soient x'_1, x''_1 les valeurs absolues des racines et $x'_1 < x''_1$, la fonction $-\frac{2x}{p}$ ou $\frac{2x}{x' + x''}$ est positive et plus grande que l'unité pour $x = x''_1$; elle est négative et égale à $-\frac{2x'_1}{x''_1 - x'_1}$, pour $x = x'_1$. Or, afin que cette valeur soit supérieure à -1 , il faut que $3x'_1 < x''_1$.

En mettant dans l'équation le signe de p en évidence, on a

$$x = \mp \left(\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} \right);$$

donc

$$x'_1 = \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} - \frac{p}{2}, \quad x''_1 = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q};$$

la relation $3x'_1 < x''_1$ conduit ainsi à l'inégalité

$$3\sqrt{\frac{p^2}{4} + q} - \frac{3p}{2} < \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q},$$

qui se réduit à

$$\frac{q}{p^2} < \frac{3}{4}.$$

Ainsi lorsque les racines sont de signes contraires, la forme particulière donnée ci-dessus à l'équation du second degré ne permettra le calcul de la racine qui a la plus petite valeur absolue que lorsque les coefficients satisferont à l'inégalité

$$\frac{q}{p^2} < \frac{3}{4}.$$

Cherchons maintenant une valeur de départ. Nous supposons, pour plus de simplicité, dans tout ce qui va suivre, p positif. Alors la racine qui a la plus petite valeur numérique est positive.

De la relation $\frac{q}{p^2} < \frac{3}{4}$ on tire $-\frac{4q}{3p^2} > -1$. Si donc on pose $-\frac{4q}{3p^2} = -\frac{2x}{p}$, la valeur $x_1 = \frac{2q}{3p}$ que l'on en déduit rendra la dérivée plus grande que -1 et plus petite que zéro. Cette valeur x_1 est moindre que x' ; car, puisque

$$x' = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} = \frac{q}{\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}},$$

on aura, en remplaçant dans le dénominateur q par $\frac{3}{4}p^2$,

$$x' > \frac{q}{\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + \frac{3}{4}p^2}},$$

ou $x' > \frac{2q}{3p}$, c'est-à-dire $x' > x_1$.

Si l'on cherche les limites qui ont été signalées au § IV,

on trouve 0 et $\frac{p}{2}$, par suite les deux intervalles $\alpha \dots L$, $L' \dots \alpha$, sont ici respectivement $-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} \dots 0$, $\frac{p}{2} \dots -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$. En les comparant on voit que si $\frac{q}{p^2} < \frac{5}{16}$, le premier est plus petit que le second; si $q > \frac{5}{16}$, le contraire a lieu. x_1 étant toujours situé dans le premier intervalle, il est établi que lorsque $\frac{q}{p^2} < \frac{5}{16}$, la valeur de départ x_1 fournit des valeurs successives telles, que chacune approche plus de la racine que la précédente.

Nous allons démontrer qu'il en est encore ainsi lorsque $\frac{q}{p^2} > \frac{5}{16}$. En effet, la valeur $x_2 = \frac{q}{p} - \frac{4q^2}{9p^3}$ que fournit x_1 étant supérieure à x' et moindre que $\frac{p}{2}$, sera dans le cas actuel située dans le plus petit des deux intervalles $\alpha \dots L$, $L' \dots \alpha$, et, par suite, chacune des valeurs obtenues après x_2 approchera plus que la précédente de la racine x' . Si donc $x_2 - x' < x' - x_1$, toutes les valeurs qui suivent x_1 seront dans le même cas. Or l'inégalité $x_2 - x' < x' - x_1$ devient, lorsque l'on y remplace les quantités qu'elle renferme par leurs valeurs,

$$\frac{q}{p} - \frac{4q^2}{9p^3} + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} < -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} - \frac{2q}{3p}$$

ou bien

$$9p^4 + 15p^2q < 4q^2 + 18p^3 \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}.$$

Or si $q = \frac{3}{4}p^2$, on a $x_1 = x' = x_2 = \frac{p}{2}$. La première inégalité, et par suite la seconde, se transforme dans cette hypothèse en une égalité. Si $q < \frac{3}{4}p^2$, le second membre de la deuxième inégalité acquiert une valeur supérieure à celle qu'il a pour $q = \frac{3}{4}p^2$; le premier, au contraire, prend une valeur inférieure; donc l'inégalité est évidente. Par suite x_2 est plus approché que x_1 .

La théorie précédente complète la Note donnée par M. Gerono dans les *Nouvelles Annales*, t. XVI, p. 436. Elle prouve que la méthode des substitutions successives appliquée à l'équation du second degré $x^2 + px - q = 0$ mise sous la forme $x = \frac{q}{p} - \frac{x^2}{p}$ ne pourra servir au calcul de la racine positive que lorsque $\frac{q}{p^2} < \frac{3}{4}$, et que dans ce cas la quantité $\frac{2q}{3p}$ jouit de la propriété de fournir des valeurs successives approchant chacune plus que la précédente de la racine x' .

Les valeurs de x qui rendent la dérivée $-\frac{2x}{p} > -1$ étant comprises entre 0 et $\frac{p}{2}$, on voit que la quantité $\frac{q}{p}$, qui a servi dans le cas où les racines étaient de même signe, n'est pas forcément comprise entre 0 et $\frac{p}{2}$; il faudrait, pour qu'il en fût ainsi, que $p^2 > 2q$. L'application de la méthode exigeant seulement que $p^2 > \frac{4}{3}q$, on voit que la deuxième inégalité peut être satisfaite sans que la première le soit. Toutefois nous allons démontrer que lors-

que $p^2 > \frac{3}{4}q$, on peut encore prendre pour valeur de départ $x_1 = \frac{q}{p}$.

On a (*)

$$x_{n+1} = \frac{q}{p} - \frac{x_n^2}{p}, \quad x_{n+2} = \frac{q}{p} - \frac{x_{n+1}^2}{p};$$

d'où

$$x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{x_n^2 - x_{n+1}^2}{p},$$

ou bien

$$x_{n+2} - x_{n+1} = - (x_{n+1} - x_n) \frac{x_{n+1} + x_n}{p}.$$

Pour que les deux différences $x_{n+2} - x_{n+1}$, $x_{n+1} - x_n$ soient de signes contraires, et la première numériquement moindre que la seconde, on doit avoir

$$\frac{x_{n+1} + x_n}{p} > 0, \quad \frac{x_{n+1} - x_n}{p} < 1.$$

Or

$$\frac{x_{n+1} + x_n}{p} = \frac{q}{p^2} - \frac{x_n^2}{p^2} + \frac{x_n^2}{p};$$

les deux inégalités précédentes deviennent donc

$$-x_n^2 + px_n + q > 0, \quad -x_n^2 + px_n + q - p^2 < 0.$$

Pour que la première soit satisfaite, x_n doit être compris entre les racines de l'équation $X^2 - pX - q = 0$, c'est-

(*) Les calculs qui suivent peuvent être reliés entre eux par un raisonnement inverse et fournir ainsi une solution élémentaire plus complète que celle qui a été donnée jusqu'à ce jour, de cette question du programme de mathématiques spéciales : « Résolution de l'équation $ax^3 + bx - c = 0$, » lorsque a est très-petit », si toutefois on emploie pour solution de cette question la méthode des substitutions successives.

à-dire entre

$$\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} \quad \text{et} \quad \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}.$$

Quant à la seconde, les racines de l'équation

$$X^2 - pX - q + p^2 = 0$$

étant imaginaires si $3p^2 > 4q$, elle est satisfaite pour toute valeur de x . Pour que la quantité $\frac{q}{p}$ puisse être une valeur de départ, il suffit de voir si

$$\frac{q}{p} < \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}.$$

Or cette inégalité est satisfaite si l'on a $\frac{q}{p^2} < 2$. Ce qui a lieu effectivement.

Lorsque $\frac{q}{p^2} < \frac{3}{4}$ et $\frac{q}{p}$ la valeur de départ, les premières valeurs obtenues peuvent ne pas satisfaire à la condition que chacune d'elles soit plus approchée de la racine que la précédente. Mais l'ensemble des valeurs supérieures à x' tend vers x' , et il en est de même des valeurs inférieures. Ce qu'il y a de remarquable, c'est qu'une valeur approchée par défaut donne toujours pour la valeur suivante un nombre approchant davantage de la vraie valeur de la racine.

En effet, soient $x_n < x'$, $x_{n+1} > x'$; la différence $x_{n+1} - x'$ sera moindre que $x' - x_n$, si l'on a $x_n + x_{n+1} < 2x'$. Substituons les valeurs de x_{n+1} et de x' et posons

$$-p + 2\sqrt{\frac{p^2}{4} + q} > x_n + \frac{q}{p} - \frac{x_n^2}{p}.$$

On en déduit

$$x_n^2 - px_n - q - p^2 + 2p\sqrt{\frac{p^2}{4} + q} > 0;$$

x_n doit donc être inférieur à la plus petite des racines

$$-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}, \quad \frac{3}{2}p - \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$$

de l'équation

$$x^2 - px - q - p^2 + 2p\sqrt{\frac{p^2}{4} + q} = 0;$$

et comme cette plus petite racine $-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$ est la racine elle-même qu'il s'agit de calculer, on voit que l'inégalité

$$x_{n+1} - x' < x' - x_n$$

est satisfaite d'elle-même.

Les valeurs supérieures à x' peuvent au contraire donner des valeurs moins approchées qu'elles-mêmes. En effet, de l'inégalité

$$x_n - x' > x' - x_{n+1}$$

on déduit

$$x_n^2 - px_n - q - p^2 + 2p\sqrt{\frac{p^2}{4} + q} < 0,$$

et, par conséquent, x_n est une valeur comprise entre les racines

$$-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}, \quad \frac{3}{2}p - \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$$

de l'équation

$$x^2 - px - q - p^2 + 2p\sqrt{\frac{p^2}{4} + q} = 0.$$

Si donc x_n n'est pas inférieur à $\frac{3}{2}p - \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$, la valeur x_{n+1} sera moins approchée que x_n . Si l'on pose

$$\frac{q}{p} < \frac{3}{2}p - \sqrt{\frac{p^2}{4} + q};$$

on trouve

$$2 < \left(2 - \frac{q}{p^2}\right)^2,$$

ou bien

$$\frac{q}{p^2} < 2 - \sqrt{2},$$

condition qui a été indiquée par M. Gerono.

On peut montrer que si la condition $q - \frac{3}{4}p^2 < 0$ n'est pas satisfaite, les valeurs successives que l'on obtient doivent, dans le voisinage de la racine x' , s'écarter de plus en plus de cette racine. En effet, lorsque $q - \frac{3}{4}p^2 > 0$, les racines

$$X_1 = \frac{p}{2} - \sqrt{q - \frac{3}{4}p^2}, \quad X_2 = \frac{p}{2} + \sqrt{q - \frac{3}{4}p^2}$$

de l'équation

$$X^2 - pX - q + p^2 = 0$$

étant réelles, la fonction $\frac{x_{n+1} + x_n}{p}$ sera supérieure à l'unité pour x_n compris entre X_1 et X_2 et inférieure à 1 lorsque x_n sera moindre que X_1 ou plus grand que X_2 .

Cela posé, considérons les valeurs de x pour lesquelles la fonction $\frac{q}{p} - \frac{x^2}{p}$ est positive; ce sont les seules qui intéressent, puisque la racine est positive. Elles sont moindres que $\sqrt{q}$. Supposons X_1 positif, et par suite

$p^2 > q$. On aura

$$X_1 < x' < X_2 < \sqrt{q}.$$

Pour $x = X_1$, la fonction $\frac{p}{q} - \frac{x^2}{p}$ acquiert la valeur X_2 , et pour $x = X_2$ elle est égale à X_1 ; d'ailleurs on a l'identité

$$x' = \frac{q}{p} - \frac{x'^2}{p}.$$

1° La fonction $\frac{q}{p} - \frac{x}{p}$ étant décroissante lorsque x croît de 0 à ∞ , puisque sa dérivée est alors négative, pour x compris entre X_1 et x' , elle acquerra une valeur comprise entre x' et X_2 ; et, pour x intermédiaire entre x' et X_2 , elle prendra une valeur située entre x' et X_1 . Il en résulte que si l'on prend une valeur initiale comprise entre X_1 et X_2 , la condition $\frac{x_{n+1} + x_n}{p} > 1$ étant remplie, et par conséquent aussi la condition $\frac{x_{n+1} + x_n}{p} > 0$, les différences successives $x_{n+1} - x_n$, $x_{n+2} - x_{n+1} \dots$, seront alternativement de signes contraires, mais leurs valeurs absolues iront en croissant. Les valeurs successives qui sont supérieures à x' s'éloigneront donc de x' , et il en est de même des valeurs inférieures. Les valeurs obtenues pour les différences $x_{n+1} - x_n, \dots$, sont toujours moindres que $X_2 - X_1$, c'est-à-dire moindres que $2\sqrt{q - \frac{3}{4}p^2}$. Mais comme une valeur peu différente de X_1 donne une valeur qui diffère peu de X_2 , il en résulte que les différences des valeurs successives que l'on obtient étant prises en valeurs absolues tendent vers $2\sqrt{q - \frac{3}{4}p^2}$.

2° Si l'on donne à x une valeur comprise entre 0 et X_1 , la fonction $\frac{q}{p} - \frac{x^2}{p}$ prendra une valeur située entre $\frac{q}{p}$ et X_2 ; si x est intermédiaire entre X_1 et $\sqrt{q}$, la valeur de la fonction sera comprise entre X_1 et 0; d'ailleurs que x soit compris entre 0 et X_1 ou bien entre X_2 et $\sqrt{q}$, la condition $\frac{x_{n+1} + x_n}{p} > 0$ est satisfaite; donc si on prend une valeur initiale située entre 0 et X_1 , ou bien entre X_1 et $\sqrt{q}$, les différences successives sont $x_{n+1} - x_n$, $x_{n+2} - x_{n+1}, \dots$, seront de signes contraires et leurs valeurs absolues iront en décroissant. Les valeurs supérieures à x' décroîtront donc, et les valeurs inférieures iront en croissant; mais ces valeurs ne tendront pas indéfiniment vers la racine x' , leurs limites respectives sont X_2 et X_1 .

Les réflexions qui précèdent préviennent une erreur que l'on serait porté à commettre par suite d'un examen insuffisant des valeurs successivement obtenues lorsque $p^2 > q > \frac{3}{4}p^2$. Si dans ce cas on part de la valeur $\frac{q}{p}$, on obtient une série de valeurs qui se rapprochent de la racine x , mais qui ne tendent pas indéfiniment vers cette racine.

Supposons X_1 négatif; alors $p^2 < q$, on aura

$$X_1 < x' < \sqrt{q} < X_2;$$

les valeurs qui rendent la fonction $\frac{q}{p} - \frac{x^2}{p}$ positive étant toutes comprises entre X_1 et X_2 , il s'ensuit que pour toute valeur de départ donnant une suite de valeurs positives, les différences $x_{n+1} - x_n, \dots$, iront en augmentant en valeurs absolues, et par conséquent les valeurs obtenues s'éloigneront de plus en plus de la racine x' .

VI.

*Application de la même théorie à l'équation
du troisième degré.*

Nous supposons d'abord les racines réelles. Alors p est négatif et $4p^3 + 27q^2 < 0$. Nous mettrons donc l'équation sous la forme $x^3 - px + q = 0$. On en tire

$$x = \frac{q}{p} + \frac{x^3}{p}.$$

La dérivée du second membre est $\frac{3x^2}{p}$; elle est donc positive pour toute valeur de x . Pour qu'elle soit plus petite que l'unité, x doit être compris entre les racines de l'équation $\frac{3x^2}{p} = 1$, c'est-à-dire entre $-\sqrt{\frac{p}{3}}$ et $+\sqrt{\frac{p}{3}}$. Or les racines de l'équation proposée étant réelles sont comprises entre

$$\begin{aligned} & -\infty \quad \text{et} \quad -\sqrt{\frac{p}{3}}, \\ & -\sqrt{\frac{p}{3}} \quad \text{et} \quad +\sqrt{\frac{p}{3}}, \\ & +\sqrt{\frac{p}{3}} \quad \text{et} \quad +\infty. \end{aligned}$$

La racine qui a la plus petite valeur numérique est donc comprise entre $-\sqrt{\frac{p}{3}}$ et $+\sqrt{\frac{p}{3}}$, et les autres sont en dehors de ces limites. Il en résulte que la forme donnée à l'équation ne permet que le calcul de la racine qui a la plus petite valeur numérique. Les signes de la fonction $x^3 - px + q$, pour $x = -\sqrt{\frac{p}{3}}$, $x = +\sqrt{\frac{p}{3}}$, étant respectivement $+$ et $-$, et son signe pour $x = 0$ étant celui de q , on voit que, si $q > 0$, la racine est positive,

si $q < 0$, la racine est négative : elle est donc de même signe que q . Or on a $\frac{q}{p}$ moindre en valeur absolue que $\sqrt{\frac{p}{3}}$; donc $\frac{q}{p}$ est une valeur de départ.

Supposons que, p étant négatif, l'équation ait deux racines imaginaires. Alors la racine réelle est de signe contraire à q . Si q est positif, la substitution de $-\sqrt{\frac{p}{3}}$ dans l'équation donnant un résultat positif, la racine qui est négative est inférieure à $-\sqrt{\frac{p}{3}}$. Si q est négatif, la substitution de $\sqrt{\frac{p}{3}}$ donne un résultat négatif; la racine qui est positive est donc plus grande que $\sqrt{\frac{p}{3}}$. La forme particulière donnée à l'équation ne permet donc pas le calcul de la racine réelle.

Si p est positif, l'équation, en supposant q négatif, devient $x^3 + px - q = 0$. On en déduit $x = \frac{q}{p} - \frac{x^3}{p}$. La dérivée du second membre est négative, quel que soit x ; pour qu'elle soit supérieure à -1 , il faut que x soit compris entre $-\sqrt{\frac{p}{3}}$ et $+\sqrt{\frac{p}{3}}$; q étant négatif, la racine réelle est positive; elle ne sera inférieure à $+\sqrt{\frac{p}{3}}$ qu'autant que l'on aura $\frac{q^2}{p^3} < \frac{16}{27}$. Donc lorsque p est positif, la méthode n'est applicable à la forme $x = \frac{q}{p} - \frac{x^3}{p}$ que dans le cas où $\frac{q^2}{p^3} < \frac{16}{27}$.

(397.)

Si on pose $-\frac{3x^2}{p} = -\frac{27q^3}{16p^3}$, la valeur positive $x_1 = \frac{3q}{4p}$ que l'on en tire pour x rendra la dérivée plus grande que -1 , et s'il en est de même de la valeur $x_2 = \frac{q}{p} - \frac{27q^3}{64p^4}$ que fournit x_1 , on pourra prendre x_1 pour valeur de départ. En effet, l'une des quantités x_1 , x_2 sera nécessairement comprise dans le plus petit des deux intervalles $\alpha...L$, $L'...\alpha$ signalés au § IV. Voyons donc si l'inégalité

$$\frac{q}{p} - \frac{27q^3}{64p^4} < \sqrt{\frac{p}{3}},$$

laquelle revient à

$$3.64^2 q^4 p^6 + 3.27^2 q^8 < 64^2 p^9 + 2 \cdot 3 \cdot 27 q^4 p^8,$$

est vérifiée.

Or si $\frac{q^2}{p^3} = \frac{16}{27}$, on a $x_1 = \frac{3q}{4p} = \sqrt{\frac{p}{3}} = x_2 = x'$, x' étant la racine réelle de l'équation $x^3 + px - q = 0$. La première inégalité, et par suite la seconde, se transforment dans cette hypothèse en une égalité. Si $\frac{q^2}{p^3} < \frac{16}{27}$, le premier membre de la deuxième inégalité prend une valeur inférieure à celle qu'il a pour $\frac{q^2}{p^3} = \frac{16}{27}$; le second membre au contraire prend une valeur plus grande: donc l'inégalité est évidente. Par suite $x_1 = \frac{3q}{4p}$ est une valeur de départ.

La quantité $\frac{q}{p}$ qui, dans le premier cas, a servi de valeur de départ, ne jouit pas dans celui-ci de la propriété de rendre toujours la dérivée plus grande que -1 .

VII.

Par les exemples qui précèdent, on voit que la forme

$$x = \varphi(x)$$

donnée à l'équation $F(x) = 0$ ne permet pas le calcul approché de toutes les racines. Nous allons montrer que l'on peut toujours, par la méthode des substitutions successives, calculer toutes les racines de l'équation

$$F(x) = 0,$$

à la condition de savoir trouver la fonction $x = \psi(y)$ inverse de $y = \varphi(x)$.

En effet, admettons que l'on sache trouver cette fonction inverse. On pourra mettre l'équation $F(x) = 0$ ou $x = \varphi(x)$ sous la forme $x = \psi(x)$. Mais, d'après la nature des fonctions $x = \psi(y)$, $y = \varphi(x)$, on a

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\psi'(y)},$$

x, y étant deux valeurs correspondantes. Or, lorsque x est égal à une racine β de l'équation $F(x) = 0$, $x = y = (\beta)$; donc $\varphi'(\beta) = \frac{1}{\psi'(\beta)}$. Par suite, si, pour une racine β , $\varphi'(\beta)$ est en dehors de l'intervalle $-\dots + 1$, pour cette même valeur $\psi'(\beta)$ sera compris entre -1 et $+1$. Donc la forme $x = \psi(x)$ permet le calcul de la racine β , qui échappe à la relation $x = \varphi(x)$.

Si on applique ces considérations aux équations du deuxième et du troisième degré, on trouvera

$$x = \sqrt{-px - q}, \quad x = \sqrt[3]{-px - q}$$

pour formes inverses de

$$x = -\frac{q}{p} - \frac{x^2}{p}, \quad x = -\frac{q}{p} - \frac{x^3}{p};$$

et, par conséquent, les deux premières expressions fourniront les racines que ne donnent pas les deux dernières.

VIII.

Supposons actuellement que l'équation

$$F(x) = 0$$

ne puisse être mise que sous la forme $\psi(x) = \varphi(x)$.

On peut toujours regarder le x du premier membre comme une fonction explicite de $\varphi(x)$ et poser

$$x = \xi[\varphi(x)].$$

Dès lors, si, pour une racine α , $\xi'[\varphi(\alpha)] \cdot \varphi'(\alpha)$ était compris entre -1 et $+1$, on pourrait déterminer α par les calculs suivants :

$$x_2 = \xi[\varphi(x_1)],$$

$$x_3 = \xi[\varphi(x_2)],$$

.....

Or la forme explicite $\xi[\varphi(x)]$ n'étant pas connue, par hypothèse, on ne pourra déterminer les quantités $x_2, x_3, \dots$ que par la résolution des équations

$$\psi(x) = \varphi(x_1), \quad \psi(x) = \varphi(x_2), \quad . . .$$

La méthode ne sera donc réellement applicable à la détermination de la racine α qu'autant que l'on pourra, à l'aide de tables, calculer la valeur de x qui fait acquiescer à $\psi(x)$ une valeur donnée.

En supposant qu'il en soit ainsi, il reste à faire voir comment on pourra reconnaître que $\xi'[\varphi(\alpha)] \cdot \varphi'(\alpha)$ est compris entre -1 et $+1$. $\xi'[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)$ est la dérivée u' de la fonction u définie par $u = \xi[\varphi(x)]$, ou encore

par $\psi(u) = \varphi(x)$. Or, en différentiant les deux membres de cette dernière équation, on a

$$\psi'(u) \cdot u' = \varphi'(x),$$

d'où

$$u' = \frac{\varphi'(x)}{\psi'(u)};$$

par suite

$$\xi'[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x) = \frac{\varphi'(x)}{\psi'(u)}.$$

Dès lors les procédés ordinaires qui, à l'aide de la fonction $\xi'[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)$ permettent de reconnaître que $\xi'[\varphi(\alpha)] \cdot \varphi'(\alpha)$ est comprise entre -1 et $+1$, pourront s'appliquer à la fonction $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(u)}$, puisque u est numériquement connu par les tables.

Si l'on remarque que, pour $x = \alpha$, u est aussi égal à α , on aura

$$\xi'[\varphi(\alpha)] \cdot \varphi'(\alpha) = \frac{\varphi'(\alpha)}{\psi'(\alpha)},$$

et par conséquent si, pour une certaine racine α , la fraction $\frac{\varphi'(\alpha)}{\psi'(\alpha)}$ n'était pas intermédiaire entre -1 et $+1$, la fraction inverse $\frac{\psi'(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}$ jouirait au contraire de cette propriété. Il en résulte qu'en supposant la résolution de l'équation $\varphi(x) = A$ possible à l'aide des tables, la racine α pourra être calculée à l'aide des opérations suivantes :

$$\varphi(x_2) = \psi(x_1),$$

$$\varphi(x_3) = \psi(x_2),$$

.....

(Fin.)