

VIANT

Démonstration de la relation indiquée par M. Mannheim

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 1
(1862), p. 337-338

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__337_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1862, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DÉMONSTRATION
DE LA RELATION INDIQUÉE PAR M. MANNHEIM

(voir page 123),

PAR M. VIANT,

Professeur de mathématiques spéciales à l'Ecole militaire de la Flèche.

J'écrirai la relation qui définit la courbe (M) de la manière suivante :

$$(1) \quad \Sigma \frac{\lambda}{r} = \frac{\mu}{R_1}.$$

Je prends les dérivées des deux membres deux fois de suite, ce qui me donne

$$(2) \quad \Sigma \frac{\lambda r'}{r^2} = \frac{\mu R'_1}{R_1^2},$$

et, en ôtant un facteur après la seconde dérivation,

$$(3) \quad \Sigma \frac{\lambda (rr'' - 2r'^2)}{r^3} = \frac{\mu (R_1 R''_1 - 2R'^2_1)}{R_1^3}.$$

Je multiplie les termes de l'égalité (1) respectivement

par

$$\frac{r^2}{r^2}, \quad \frac{r_1^2}{r_1^2}, \dots, \quad \frac{R_1^2}{R_1^2},$$

et j'en retranche l'égalité (3); ce qui conduit à

$$(4) \quad \Sigma \frac{\lambda (r^2 + 2r'^2 - rr'')}{r^3} = \frac{\mu (R_1^2 + 2R_1'^2 - R_1 R_1'')}{R_1^3}.$$

On sait que l'expression du rayon de courbure est

$$\rho = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''}, \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{r^3 \left[1 + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''};$$

ou encore

$$\rho = \frac{r^3}{\cos^3 \alpha (r^2 + 2r'^2 - rr'')},$$

en se rappelant que

$$\frac{r}{r'} = \tan V = \cot \alpha,$$

V étant l'angle que fait la tangente avec le rayon vecteur, et α celui qu'on a défini dans l'énoncé.

De la dernière formule de ρ on tire

$$\frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{r^3} = \frac{1}{\rho \cos^3 \alpha},$$

et en substituant dans l'égalité (4), on a la relation

$$\Sigma \frac{\lambda}{\rho \cos^3 \alpha} = \frac{\mu}{R \cos^3 \varphi}.$$

C. Q. F. D.