

JOSEPH SACCHI

**Aire du triangle rectiligne en fonction
des bissectrices conjuguées**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 1
(1862), p. 332-334

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__332_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1862, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

AIRE DU TRIANGLE RECTILIGNE EN FONCTION DES BISSECTRICES CONJUGUÉES;

PAR M. JOSEPH SACCHI.

Soient ABC un triangle dont les côtés

$$BC = X_1, \quad CA = X_2, \quad AB = X_3; \quad X_1 < X_2 < X_3;$$

D et D' les points auxquels le côté BC et son prolongement sont rencontrés par $AD = b_1, AD' = b'_1$, bissectrices conjuguées correspondantes à l'angle $BAC = \alpha_1$, opposé au côté X_1 ; $b_2, b'_2; b_3, b'_3$, les deux couples de bissectrices correspondantes aux angles α_2, α_3 , opposés aux deux autres côtés X_2, X_3 ; A l'aire du triangle.

Que l'on conduise DE, D'E', parallèles à AC et qui rencontrent BA et son prolongement en E et E', et que l'on fasse

$$DE = l, \quad D'E' = l'.$$

Les triangles BDE, BD'E', semblables à BAC, donnent

$$l = \frac{X_3 X_1}{X_3 + X_2}, \quad l' = \frac{X_3 X_2}{X_3 - X_2};$$

les triangles ADE, AD'E', isocèles par les propriétés des bissectrices, donnent les équations

$$b_1^2 = 2l^2(1 + \cos \alpha_1), \quad b'_1{}^2 = 2l'^2(1 - \cos \alpha_1),$$

dont le produit est

$$b_1 b'_1 = 2 ll' \sin \alpha_1.$$

Remplaçant l et l' par leurs valeurs, et observant que

$$X_2 X_3 \sin \alpha_1 = 2A,$$

on a

$$X_3^2 - X_2^2 = X_3 X_2 \frac{4A}{b_1 b'_1}.$$

D'une manière analogue, on obtiendrait

$$X_3^2 - X_1^2 = X_3 X_1 \frac{4A}{b_2 b'_2}, \quad X_2^2 - X_1^2 = X_2 X_1 \frac{4A}{b_3 b'_3}.$$

Or, en posant

$$\frac{X_3}{X_1} = x, \quad \frac{X_2}{X_1} = y, \quad \frac{1}{b_r b'_r} = q_r, \quad 4A q_r = p_r,$$

les trois dernières équations donnent les suivantes :

$$(1) \quad x^2 - y^2 = p_1 xy,$$

$$(2) \quad x^2 - 1 = p_2 x,$$

$$(3) \quad y^2 - 1 = p_3 y;$$

de la somme des équations (1) et (3) retranchant l'équation (2), on a

$$y = \frac{p_2 x}{p_1 x + p_3}.$$

Au moyen de cette valeur, l'équation (3) devient

$$(p_1 p_2 p_3 + p_1^2 - p_2^2) x^2 + (p_2 p_3^2 + 2 p_1 p_3) x + p_3^2 = 0;$$

additionnant cette dernière équation avec celle qu'on obtient en multipliant par p_3^2 l'équation (2), on a

$$x (p_1 p_2 p_3 + p_1^2 - p_2^2 + p_3^2) + 2 p_1 p_3 = 0;$$

éliminant x des deux dernières, on a

$$(p_1 p_2 p_3)^2 = (p_1^2 - p_2^2 + p_3^2)^2 - 4 p_1^2 p_3^2,$$

de laquelle, en remplaçant p_r par sa valeur, et en posant

$$q_1 + q_2 + q_3 = 2s,$$

on tire la formule cherchée

$$q, q, q, A = \sqrt{s(q_1 - s)(q_2 - s)(q_3 - s)}.$$

Si l'on pose

$$2 \sin \frac{\alpha_r}{2} = h_r, \quad \frac{2}{b_r h_r} = k_r,$$

et si l'on fait la somme des aires des deux triangles dans lesquels le triangle donné est partagé par chacune des bissectrices, on obtient

$$X_2 + X_3 = 2A k_1, \quad X_1 + X_3 = 2A k_2, \quad X_1 + X_2 = 2A k_3,$$

desquelles on tire les valeurs de x_r qui transforment la formule connue

$$16A^2 = h_1 h_2 h_3 X_1 X_2 X_3 (X_1 + X_2 + X_3),$$

dans la suivante

$$\frac{1}{A} = \sqrt{h_1 h_2 h_3} \sqrt{t(t - k_1)(t - k_2)(t - k_3)},$$

où

$$2t = k_1 + k_2 + k_3,$$

qui donne l'aire d'un triangle en fonction des bissectrices intérieures et des sinus des demi-angles du même triangle.