

P.-A.-G. COLOMBIER

Démonstration de la question 104

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 1
(1862), p. 244-246

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__244_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1862, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DÉMONSTRATION DE LA QUESTION 104

(voir t. VIII, p. 236 et 443);

PAR M. P.-A.-G. COLOMBIER,

Professeur à Paris.

$f(x) = 0$ est une équation algébrique dont toutes les racines sont réelles et inégales. Démontrer qu'en égalant à zéro la dérivée seconde de

$$[f(x)]^{-1}$$

on obtient une équation dont toutes les racines sont imaginaires. (CATALAN.)

Démonstration. — Pour abrégé, nous désignerons

$$f(x) \quad \text{et} \quad [f(x)]^{-1}$$

respectivement par y et Y . Dès lors on a

$$(1) \quad Yy = 1.$$

Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ toutes les racines de l'équation donnée. On a identiquement

$$(2) \quad f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n);$$

prenons la dérivée première de chacune des équations (1) et (2), il vient :

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{Y'}{Y} = -\frac{y'}{y}, \\ \frac{y'}{y} = \sum \frac{1}{x - a_i}, \end{cases}$$

d'où

$$\frac{Y'}{Y} = - \sum \frac{1}{x - a_i}.$$

Prenons les dérivés des deux membres de cette dernière égalité, on trouve

$$(4) \quad \frac{YY'' - Y'^2}{Y^2} = \sum \frac{1}{(x - a_i)^2}.$$

Quelle que soit la valeur réelle attribuée à x , la quantité Y est réelle; par suite, Y^2 est toujours positive. De plus, l'équation donnée n'ayant que des racines *réelles*, par hypothèse, il s'ensuit que le second membre de l'équation (4) est positif; donc on a

$$(5) \quad YY'' - Y'^2 > 0,$$

ou bien, en éliminant Y et Y' au moyen des équations (1)

et (3), on peut écrire

$$y^3 Y'' > y'^2;$$

mais l'équation donnée ayant toutes ses racines *réelles et inégales*, par hypothèse, il s'ensuit que l'équation

$$y' = 0$$

a aussi toutes ses racines réelles et inégales, d'après le théorème de Rolle; donc y^2 est toujours positif; par suite, on a

$$yY'' > 0.$$

Or, y ne peut devenir infini pour aucune valeur finie de x ; donc Y'' ne peut devenir nulle pour aucune valeur finie de x , ce qui veut dire en d'autres termes que l'équation

$$Y'' = 0$$

a toutes ses racines imaginaires. c. q. f. d.

Observation. — Nous laissons au lecteur le soin de trouver l'interprétation géométrique des relations (3) et (5), et de démontrer *à priori* que le polynôme représenté par Y'' est toujours de degré pair, quelle que soit la valeur de n .

Historique. — L'égalité (2) est due à l'algébriste anglais Thomas Harriot. On la trouve dans l'ouvrage posthume de cet auteur ayant pour titre : *Artis analyticæ praxis, ad æquationes algebraicas novâ, expeditâ et generali methodo resolvendas*. Londres, 1631; in-folio.
