

MAHUET

DELAFOND

Solution de la question 609

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 1
(1862), p. 179-182

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__179_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1862, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 609

(voir p. 31);

PAR MM. MAHUET ET DELAFOND,
Élèves de spéciales du lycée de Lyon.

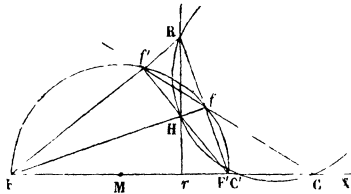
1^{re} Solution. — La droite Rr est la polaire du point C par rapport au cercle $Ff'fF'$ décrit sur FF' comme dia-

mètre. Donc

$$MC \cdot Mr = \overline{MF'}^2$$

ou

$$\begin{aligned} (Mr + rC) Mr &= \overline{MF'}^2 \\ Mr \cdot rC &= \overline{MF'}^2 - \overline{Mr}^2 \\ &= (MF + Mr)(MF - Mr) = Fr \cdot rF'. \end{aligned}$$



Or, d'après un théorème de géométrie, on a

$$rH \cdot Rr = Fr \cdot rF';$$

de plus

$$rH \cdot rR = rC' \cdot rC,$$

C' étant le second point de rencontre du cercle (R, H, C) avec FF'.

On aura donc

$$Mr \cdot rC = rC' \cdot rC;$$

on en déduit

$$rC' = Mr.$$

Reprenant l'égalité

$$MC \cdot Mr = \overline{MF'}^2,$$

on en tire

$$2Mr \cdot MC = 2\overline{MF'}^2,$$

$$MC' \cdot MC = 2\overline{MF'}^2 = \frac{\overline{FF'}^2}{2}.$$

- Donc toutes les tangentes issues de M sont d'une longueur constante $= \frac{FF'}{\sqrt{2}}$.

II^e Solution, par l'analyse. — Soient pris pour axes rR et rF' ; soient p et p' les abscisses de F et de F', q l'ordonnée de R. Les droites FR, F'R auront pour équations

$$FR \left| \frac{y}{q} + \frac{x}{p'} = 1, \quad F'R \left| \frac{y}{q} + \frac{x}{p} = 1.. \right.$$

Pour trouver l'équation de ff' , prenons une combinaison linéaire du cercle décrit sur FF' comme diamètre et du système des deux droites FR et F'R.

$$\left(\frac{y}{q} + \frac{x}{p'} - 1 \right) \left(\frac{y}{q} + \frac{x}{p} - 1 \right) = 0$$

est l'équation du système des deux droites, qui peut s'écrire

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} pp'y^2 + q^2x^2 + (p+p')qyx \\ -2pp'qy - (p+p')q^2x + pp'q^2 \end{array} \right\} = 0.$$

L'équation du cercle décrit sur FF' est

$$\left(x - \frac{p+p'}{2} \right)^2 + y^2 = \left(\frac{p-p'}{2} \right)^2$$

ou

$$(2) \quad x^2 + y^2 - (p+p')x + pp' = 0.$$

Multiplions l'équation (2) par q^2 et retranchons de l'équation (1), nous aurons

$$y^2(q^2 - pp') - xy(p+p')q + 2pp'q \cdot y = 0,$$

qui nous donne

$$y = 0$$

et

$$(3) \quad y(q^2 - pp') - x(p+p')q + 2pp'q = 0.$$

Cette dernière équation est l'équation de ff' .

Les coordonnées de C seront

$$y = 0, \quad x = \frac{2pp'}{p+p'}$$

L'équation générale du cercle (R, H, C) sera

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0.$$

Pour avoir la puissance de ce cercle sur le point M, il suffira de substituer dans cette équation les coordonnées de M, ce qui donnera

$$\left(\frac{p+p'}{2}\right)^2 + \frac{p+p'}{2} A + C.$$

Reste à calculer A et C.

En faisant $x = 0$ dans l'équation du cercle, nous aurons

$$C = Rr \cdot rH = -pp'.$$

Si l'on fait $y = 0$, l'abscisse de C étant $\frac{2pp'}{p+p'}$, celle de

C' sera $-\frac{pp'}{\left(\frac{2pp'}{p+p'}\right)} = -\frac{p+p'}{2}$. On aura

$$-A = -\frac{p+p'}{2} + \frac{2pp'}{p+p'} = -\frac{(p-p')^2}{2(p+p')}.$$

Donc la puissance du cercle sur M sera

$$\begin{aligned} & \left(\frac{p+p'}{2}\right)^2 + \frac{(p+p')}{2} \frac{(p-p')^2}{2(p+p')} - pp' \\ &= \left(\frac{p+p'}{2}\right)^2 + \left(\frac{p-p'}{2}\right)^2 - pp' \\ &= 2 \left(\frac{p-p'}{2}\right)^2 = 2 \cdot MF^2 = \frac{FF'^2}{2}. \end{aligned}$$

On retrouve ainsi le même résultat que précédemment.