MANNHEIM

Note sur les rayons de courbure

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 123-125

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__123_0>

NOTE SUR LES RAYONS DE COURBURE;

Par M. MANNHEIM.

Une transversale passe par un point fixe O et rencontre en A, A_1, A_2,... des courbes données (A), (A_1), (A_2),...; on prend sur cette droite un point M, tel que l'on ait

$$\frac{\lambda}{OA}+\frac{\lambda_1}{OA_1}+\frac{\lambda_2}{OA_2}+\ldots=\frac{\mu}{OM},$$

$\lambda, \lambda_1, \lambda_2,\ldots, \mu$ étant des constantes; lorsque la transversale tourne autour du point O, le point M décrit une courbe (M) et l'on a

$$(1)\qquad \frac{\lambda}{\rho\cos^3\alpha}+\frac{\lambda_1}{\rho_1\cos^3\alpha_1}+\frac{\lambda_2}{\rho_2\cos^3\alpha_2}+\ldots=\frac{\mu}{R\cos^3\varphi},$$

ρ est le rayon de courbure de (A) au point A et α l'angle de ce rayon et de la transversale, de même pour ρ_1, α_1,..., et enfin pour R et φ relativement à M (*).

Si A, A_1,... sont tous les points d'intersection d'une transversale issue du point O avec une même courbe d'ordre m et que l'on pose

$$\frac{1}{OA}+\frac{1}{OA_1}+\frac{1}{OA_2}+\ldots=\frac{m}{OM},$$

d'après le théorème de Cotes, lorsque la transversale tourne autour de O, le point M décrit une ligne droite et

(*) M. Mannheim n'ayant pas fait connaître ici comment il est arrivé à la relation (1), nous insérerons les démonstrations de cette relation qu'on voudra bien nous envoyer.

la relation (1) devient simplement

$$(2)\qquad \frac{1}{\rho\cos^3\alpha}+\frac{1}{\rho_1\cos^3\alpha_1}+\frac{1}{\rho_2\cos^3\alpha_2}+\ldots=0.$$

Cette formule étant indépendante de la position du point O, est vraie pour une transversale arbitraire qui coupe une courbe algébrique d'ordre quelconque. On peut la déduire d'une belle relation due à M. Liouville (voir *Journal de Mathématiques*, t. VI, p. 411).

La formule (2) conduit à des conséquences intéressantes, parmi lesquelles on peut citer la suivante :

En deux points quelconques A, A_1 d'une courbe quelconque du second ordre les rayons de courbure sont entre eux comme les cubes des tangentes AT, A_1T, issues de ces points et limitées au point T où ces tangentes se coupent (*).

Si l'on n'a que deux courbes (A), (A_1), le point M étant déterminé par la relation

$$\frac{1}{OA}+\frac{1}{OA_1}=\frac{2}{OM},$$

en appliquant la relation (1) on a

$$(3)\qquad \frac{1}{\rho\cos^3\alpha}+\frac{1}{\rho_1\cos^3\alpha_1}=\frac{2}{R\cos^3\varphi}.$$

Le point M est dans ce cas l'harmonique conjugué de O par rapport à A et A_1. Lorsque le point O est à l'infini,

(*) M. Peaucellier a retrouvé dernièrement ce théorème (*Nouvelles Annales*, t. XX, p. 429); je l'avais aussi rencontré (*Annales de Tortolini*, t. II, p. 212) après MM. Liouville (*Journal de Mathématiques*, t. IX, p. 350) et Umpfenbach (*Journal de Crelle*, t. XXX, p. 95). On y est aussi conduit par la transformation par polaires réciproques; la démonstration directe de ce théorème est du reste très-simple.

les transversales issues de ce point sont parallèles entre elles, la courbe (M) est alors une ligne diamétrale et l'on a toujours la relation (3).

En combinant les relations (2) et (3), on peut arriver à de nombreuses conséquences. En voici une :

On coupe une courbe du troisième ordre par une transversale A, A_1, A_2, on prend le milieu M de la corde AA_1, ce point fait partie d'une ligne diamétrale (M) correspondant à la direction fixe AA_1; si l'on décrit une conique osculatrice à la courbe donnée en A_2 et tangente à (M) en M, le rayon de courbure de cette conique en M est la moitié du rayon de courbure de la ligne diamétrale au même point.

Au lieu de faire intervenir une conique osculatrice, on peut, au moyen de (2) et de (3), établir une relation très-simple entre le rayon de courbure de (M) en M et le rayon de courbure de la courbe donnée en A_2.