

P.-A.-G. COLOMBIER

**Différences et dérivées d'un ordre
quelconque des deux fonctions circulaires**
 $\sin(ax + b), \cos(ax + b)$

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 1
(1862), p. 11-15

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__11_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1862, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DIFFÉRENCES ET DÉRIVÉES
d'un ordre quelconque des deux fonctions circulaires

$$\sin(ax + b), \cos(ax + b)$$

(voir t. IX, p. 29);

PAR M. P.-A.-G. COLOMBIER,
Professeur à Paris.

1. *Notations.* — Pour simplifier l'écriture, on conviendra de désigner

$$2 \sin \frac{a \Delta x}{2} \quad \text{et} \quad \frac{a \Delta x + \pi}{2}$$

respectivement par A et B.

2. PROBLÈME I. — *Trouver la différence de l'ordre m*

de la fonction

$$y = \sin(ax + b),$$

quel que soit le nombre entier et positif m .

Solution. — Si l'on donne à la variable indépendante x un accroissement Δx , la fonction y prend un accroissement correspondant Δy , et l'on a

$$\begin{aligned} \Delta y &= \sin(ax + b + a\Delta x) - \sin(ax + b) \\ &= A \cos\left(ax + b + \frac{a\Delta x}{2}\right); \end{aligned}$$

mais

$$\cos\left(ax + b + \frac{a\Delta x}{2}\right) = \sin\left(ax + b + \frac{a\Delta x + \pi}{2}\right),$$

donc

$$\Delta y = A \sin(ax + b + B),$$

ce qui montre que la différence première de la fonction $\sin(ax + b)$ est le produit du facteur constant A par ce que devient la fonction donnée lorsqu'on augmente l'arc $ax + b$ de la constante B .

Cela posé, si l'on a égard à la règle qui donne la différence première d'un produit de deux facteurs dont l'un est constant, on aura immédiatement

$$\begin{aligned} \Delta^2 y &= A^2 \sin(ax + b + 2B), \\ \Delta^3 y &= A^3 \sin(ax + b + 3B), \end{aligned}$$

et, en général,

$$(1) \quad \Delta^m y = A^m \sin(ax + b + mB).$$

On démontrerait la généralité de cette formule par l'emploi de la méthode de Newton, dite *de proche en proche*.

3. *Observation.* — Dans les Traités de Calcul infinité-

simal où l'on s'occupe du problème précédent, on trouve deux formules pour représenter $\Delta^m y$. De plus, dans l'une de ces formules on distingue le cas où m est simplement pair et celui où m est doublement pair; dans l'autre on fait les mêmes distinctions pour $m - 1$. La formule (1) convenant à tous les cas, sans qu'il soit nécessaire de faire aucune hypothèse sur m , fournit donc une réponse plus simple du problème ci-dessus.

4. *Corollaire I.* — Si l'on divise les deux membres de l'équation (1) par Δx^m , on aura

$$\frac{\Delta^m y}{\Delta x^m} = a^m \left(\frac{A}{a \Delta x} \right)^m \sin (ax + b + mB).$$

Si l'on suppose que Δx décroisse indéfiniment de manière à pouvoir différer de zéro, d'aussi peu que l'on voudra, on aura à la limite

$$(2) \quad \frac{d^m y}{dx^m} = a^m \sin \left(ax + b + m \frac{\pi}{2} \right).$$

5. *Corollaire II.* — Si l'on fait dans cette formule $b = 0$, et $a = 1$, il vient

$$(3) \quad \frac{d^m y}{dx^m} = \sin \left(x + m \frac{\pi}{2} \right).$$

On peut trouver la formule (3) directement en suivant une méthode employée dans le problème I.

6. *PROBLÈME II.* — *Trouver la différence de l'ordre m de la fonction*

$$y_1 = \cos (ax + b),$$

quel que soit le nombre entier et positif m .

Première solution. — On suit une méthode semblable à

celle employée dans le problème I, et l'on parvient à la formule suivante

$$(4) \quad \Delta^m y_1 = A^m \cos(ax + b + mB).$$

Seconde solution. — On peut faire dépendre la solution du problème II de celle du problème I de la manière suivante :

On a l'égalité

$$\cos(ax + b) = \sin\left(ax + b + \frac{\pi}{2}\right);$$

prenant la différence de l'ordre m de chaque membre, on a immédiatement, en vertu du problème I,

$$\Delta^m y_1 = A^m \sin\left(ax + b + \frac{\pi}{2} + mB\right).$$

Si l'on retranche $\frac{\pi}{2}$ à cet arc, le sinus se change en cosinus, et l'on retrouve l'équation (4).

7. *Corollaire I.* — La formule (4) donne

$$\frac{\Delta^m y_1}{\Delta x^m} = a^m \left(\frac{A}{a \Delta x}\right)^m \cos(ax + b + mB);$$

faisant tendre Δx indéfiniment vers zéro, de manière à en différer de moins toute quantité donnée, on aura à la limite

$$(5) \quad \frac{d^m y_1}{dx^m} = a^m \cos\left(ax + b + m \frac{\pi}{2}\right).$$

8. *Corollaire II.* — Si l'on fait dans cette formule $a = 1$ et $b = 0$, il vient

$$(6) \quad \frac{d^m y_1}{dx^m} = \cos\left(x + m \frac{\pi}{2}\right).$$

On peut trouver la formule (6) directement en suivant une méthode semblable à celle du problème I.

9. *Scolies.* — Les formules (1) et (4) donnent les relations suivantes

$$(\Delta^m y)^2 + (\Delta^m y_1)^2 = (A^m)^2$$

et

$$\frac{\Delta^m y}{\Delta^m y_1} = \tan(ax + b + mB).$$

Les formules (2) et (5) donnent

$$\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)^2 + \left(\frac{d^m y_1}{dx^m}\right)^2 = (a^m)^2$$

et

$$\frac{d^m y}{dx^m} : \frac{d^m y_1}{dx^m} = \tan\left(ax + b + m\frac{\pi}{2}\right).$$

10. *Historique.* — Les formules (3) et (6) sont dues à M. Hoëné Wronski. On les trouve à la page 451 de celui de ses ouvrages qui a pour titre : *Philosophie de la Technique algorithmique*. Ce savant est arrivé à ces deux formules en prenant les dérivées de l'ordre m des deux membres de chacune des relations

$$(7) \quad \cos x = \frac{1}{2} (e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}),$$

$$(8) \quad \sin x = \frac{1}{2\sqrt{-1}} (e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}).$$

Nous dirons en passant que les formules (7) et (8) sont dues à Jean Bernoulli, bien qu'elles aient été publiées pour la première fois par Léonard Euler.
