NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

STANISLAS KAMINSKY

Solution de la question 551

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 97-99

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__97_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 551

(voir t. XIX, p. 404);

PAR M. STANISLAS KAMINSKY.

1. *Lemme.* La somme de deux carrés n'est jamais de la forme $4n+3$.

2. *Lemme.* Un nombre pair de facteurs de la forme $4n+3$ donne un produit de la forme $4n+1$.

Un nombre impair de facteurs de la forme $4n+3$ donne un produit de même forme.

3. *Lemme.* La somme de deux carrés impairs est de la forme $4n+2$.

THÉORÈME. *L'équation*

$$(1) \qquad x^2+y^2=pz^2,$$

p *étant un nombre de la forme* $4n+3$, *est impossible en nombres rationnels.*

Démonstration. Soient

$$x=\frac{m}{l}, \quad y=\frac{n}{q}$$

deux nombres fractionnaires irréductibles ; on devra avoir

$$(2) \qquad m^2 q^2 + n^2 l^2 = p q^2 l^2.$$

Il y a trois cas.

1er CAS. q et l impairs ; alors $q^2 l^2$ est de la forme $4n + 1$ (lemme 2), donc $pq^2 l^2$ est de la forme $4n + 3$; par conséquent l'équation (2) est impossible (lemme 1).

2e CAS. q pair et l impair ; $n^2 l^2 = pq^2 l^2 - m^2 q^2$; équation impossible, car q étant pair, n est impair ; donc $n^2 l^2$ est impair.

3e CAS. q pair et l pair ; faisons

$$q = 2^r q_1, \quad l = 2^s l_1 \quad \text{et} \quad s > r;$$

l_1 et q_1 sont impairs ; donc

$$2^{2r} m^2 q'^2 + 2^{2s} n^2 l'^2 = p\, 2^{2r+2s} q'^2 l'^2$$

ou

$$m^2 q'^2 + 2^{2(s-r)} n^2 l'^2 = 2^{r+2s} q'^2 l'^2;$$

équation impossible, car $m^2 q'^2$ est impair.

Autre démonstration d'après Legendre.

Si

$$p = s^2 t, \quad \text{on pose} \quad sz = z'$$

et l'équation (1) conserve la même forme ; donc on peut admettre que p ne renferme pas de diviseur carré.

Soit donc

$$p = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, \ldots \alpha_n;$$

les α sont des nombres premiers.

Legendre démontre (*Théorie des nombres*, 2e éd., p. 31) que l'équation (1) n'est possible qu'autant qu'il existe un nombre entier λ qui satisfasse à l'équation

$$\lambda^2 + 1 = pu;$$

u étant un nombre entier, on devra donc avoir simultanément les équations

$$\lambda^2 + 1 = \alpha_1 u_1 = \alpha_2 u_2 = \alpha_3 u_3 \ldots = \alpha_n u_n;$$

les u étant des nombres entiers; or, pour que l'équation

$$\lambda^2 + 1 = \alpha_t u_t$$

soit possible, il faut que l'on ait

$$(-1)^{\frac{\alpha_t - 1}{2}} - 1 = \alpha_t \nu;$$

ν nombre entier (*Théorie des nombres*, 2^e^ édit., p. 170). Or p étant de la forme $4n + 3$, il faut qu'il y ait un nombre impair de α de cette forme (lemme 2) et au moins un.

Soit donc

$$\alpha_t = 4n + 3;$$

on devra avoir

$$(-1)^{2n+1} - 1 = \alpha_t \nu, \quad \text{ou} \quad -2 = \alpha_t \nu;$$

équation impossible; donc, etc.