Nouvelles annales de mathématiques

Combescure

Solution de la question 281 (voir t. XII, p. 327)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 92-94
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__92_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 281

(voir t. XII, p. 327);

PAR M. COMBESCURE,
Professeur au lycée de Saint-Étienne.

Par un point donné dans un plan, mener dans l'espace trois droites rectangulaires, de telle sorte qu'en prenant sur ces droites, à partir du point donné, des longueurs égales, les projections de ces longueurs sur le plan soient dans des rapports donnés.

Ces axes ainsi déterminés, tournant autour d'une droite fixe passant par le point donné, trouver les projections de ces axes après une rotation donnée.

Soient γ, γ_1, γ_2 les angles que les droites cherchées OX, OY, OZ font respectivement avec la normale oz au plan de projection yox, dans lequel on a mené à angle droit les axes ox, oy. Les trois droites étant rectangulaires, on aura d'abord

$$\cos^2\gamma + \cos^2\gamma_1 + \cos^2\gamma_2 = 1,$$

et la proportionnalité requise des projections conduira à

$$\sin\gamma_1 = m \sin\gamma, \quad \sin\gamma_2 = n \sin\gamma,$$

m et n étant des nombres donnés et prenant sur les droites la longueur commune égale à 1. On déduit immédiatement de ces trois équations

$$\sin^2\gamma = \frac{2}{m^2 + n^2 + 1},$$

et les deux dernières équations font connaître ensuite γ et γ_2.

En désignant par φ, φ_1, φ_2 les angles que font des projections avec ox, les formules connues qui expriment la perpendicularité de deux directions donnent sur-le-champ

$$\cos(\varphi_1 - \varphi) = - \cot\gamma_1 \cot\gamma,$$
$$\cos(\varphi - \varphi_2) = - \cot\gamma_2 \cot\gamma,$$
$$\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = - \cot\gamma_1 \cot\gamma_2,$$

une de ces relations étant la conséquence des deux autres, puisque la longitude initiale du système est manifestement arbitraire.

Soient actuellement λ, λ_1, λ_2 les angles qu'un axe fixe OI fait avec les trois droites dans la position qu'on vient de déterminer; Γ et Φ sa colatitude et sa longitude relativement au plan yox. Si l'on considère le triangle sphérique XIz dont les côtés sont λ, Γ, γ et les angles opposés $\varphi - \Phi$, ξ, θ, on en déduit

$$\sin\theta = \frac{\sin\gamma \sin(\varphi - \Phi)}{\sin\lambda}.$$

Or quand on fait tourner le système autour de OI d'un angle donné ω, l'angle θ devient $\theta \pm \omega$, suivant le sens de la rotation, tandis que λ et Γ restent invariables. On a donc après la rotation un nouveau triangle sphérique dans lequel on connaît deux côtés λ, Γ et l'angle compris $\theta \pm \omega$, et d'où l'on peut déduire par suite les nouvelles valeurs γ', $\varphi' - \Phi$ de γ et $\varphi - \Phi$, ce qui détermine complétement la grandeur et la direction de la projection de OX après la rotation. Il serait parfaitement inutile, surtout au point de vue de l'application, d'exprimer γ' et φ' en fonction des données immédiates. On ferait un calcul analogue pour les deux autres projections (*).