Nouvelles annales de mathématiques

E. de Jonquières

Théorèmes concernant les courbes géométriques planes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 83-85

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__83_0>

THÉORÈMES CONCERNANT LES COURBES GÉOMÉTRIQUES PLANES;

Par M. E. DE JONQUIÈRES.

I. La courbe enveloppe des cordes communes à une courbe fixe du degré m et aux courbes d'un faisceau (*) du degré n est de la classe $\frac{1}{2}m(m-1)(2n-1)$.

Si la courbe fixe est une conique, la classe de l'enveloppe est simplement $(2n-1)$. On en conclut aisément que :

II. Par $\frac{1}{2}n(n+3)-\mu$ points donnés, on peut décrire $\overline{2(2n-1)}^{\mu}$ courbes du degré n tangentes à μ coniques données.

Par exemple, il y a 7776 coniques qui touchent cinq coniques; dix billions de courbes du troisième ordre qui touchent neuf coniques, etc. M. Bischoff a donné dans le *Bulletin*, t. V, p. 17, une formule plus générale qui s'applique à des courbes tangentes quelconques, mais qui paraît en défaut dans certains cas.

III. Une transversale tourne dans un plan autour d'un point fixe S, et rencontre, à chaque instant, en m points, une courbe géométrique du degré m tracée dans ce plan.

(*) On sait que des courbes du degré n forment un *faisceau*, quand elles ont les mêmes n^2 points d'intersection, ce qui a lieu si elles passent par $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ points communs.

Si l'on mène les tangentes et les normales à la C_m en ces points d'intersection, les tangentes se coupent deux à deux sur une courbe Σ, et les normales se coupent aussi deux à deux sur une seconde courbe Σ'.

1° Le degré de la courbe Σ est $\frac{1}{2}m(m-1)(2m-3)$; cette courbe passe par chacun des $(m-2)$ points de la C_m, autres que le point de contact, qui sont situés sur chacune des $m(m-1)$ tangentes qu'on peut mener du point S à cette C_m.

Chacune des tangentes de C_m en ses points d'inflexion et de rebroussement est une tangente multiple de Σ, d'un ordre de multiplicité égal à $(m-1)$.

Si $m=2$, la courbe Σ est simplement la *droite polaire* du point S.

2° Le degré de la courbe Σ' est $\frac{1}{2}m(m-1)(2m-1)$; si l'on mène par le point S des parallèles aux m asymptotes de la C_m, et ensuite des normales à cette courbe en tous les points où ces parallèles la rencontrent à distance finie, on obtiendra d'abord $m(m-1)$ droites parallèles aux asymptotes de la courbe Σ'.

On démontre en outre que sur la courbe C_m il existe $\frac{1}{2}m(m-1)(2m-3)$ paires d'éléments infiniment petits, parallèles deux à deux et situés deux à deux sur des droites concourantes au point S. Les normales en ces points à la courbe C_m sont les directions des autres asymptotes de Σ'; on a en effet

$$m(m-1)+\frac{1}{2}m(m-1)(2m-3)=\frac{1}{2}m(m-1)(2m-1).$$

Les normales à C_m en ses points d'inflexion et de rebroussement sont des tangentes à Σ' de l'ordre $(m-1)$.

Si $m = 2$, la courbe Σ' est du troisième ordre, comme je l'ai démontré dans le tome XVIII, page 261, des *Nouvelles Annales*, à l'occasion d'un problème dont celui qui précède est la généralisation.